FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

HLME509

Département de Mécanique
Faculté des Sciences

Calcul numérique en mécanique

Organisation du module

- Cours d'Analyse Spectrale (Franck Jourdan)
- Codage Python (Rémy Mosul)
- Exemple de programmation de méthode spectrale (Rémy Mosul)
- Encadrement de projet (Franck Jourdan, Rémy Mosul)
- Apprentissage Latex et versionnement de logiciel (Rémy Mosul)

MCC : 50% CC et 50% oral

HLME509

Département
de Mécanique
Faculté des Sciences

Calcul numérique en mécanique

Cours de Mathématiques
E.S.P.C.I
Deuxième année
2009 - 2010
Elie Raphaël
Polycopié des élèves rédigé à partir du cours

METHODES, ANALYSE ET CALCULS NUMERIQUES
Eric Goncalv

Equations aux dérivées partielles

Soit $$u = u(x, y, ...)$$

$$F(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...) = 0$$

F est une EDP d'ordre 2 ou plus

Remarque

Sauf mention contraire, on exige que la fonction u et les dérivées partielles intervenant dans l'EDP soient continues sur Ω.

Généralités sur les EDP

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

Exemple

$u = u(x, y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 1^{er} ordre linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ 1^{er} ordre non-linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $2^{\text{ème}}$ ordre non-linéaire.

Equation de la diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l,\ t > 0$$

Qui dit EDP dit Conditions aux limites

Soient $u = u(x, y)$ et une EDP valide dans Ω domaine (ouvert connexe).

On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Dirichlet.

Exemple : Température imposée aux bords

On impose la valeur de $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ u\right).\overrightarrow{n}$. C'est la condition de Neumann.

Exemple : Flux de Température imposé aux bords

On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.

Exemple : Flux de Température imposé aux bords dépendant de la différence de Température

Soit $$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{D}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{F}u+\mathrm{G}=0$$

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $c>0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=4c^2>0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}-d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $d>0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

(iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=-4<0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

(iv) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$: Equation de Tricomi.

- $y>0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique.
- $y=0 \Rightarrow$ l'EDP est parabolique.
- $y<0 \Rightarrow$ l'EDP est elliptique.

Méthode de séparation de variable

$$\boxed{u(x,t) = f(x)g(t)}$$

Equation de la diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pour } 0 < x < l, \ \ t > 0$$

Condition aux limites

- $u(x = 0, t) = 0, \ \ t > 0$
- $u(x = l, t) = 0, \ \ t > 0$
- $u(x, 0) = \varphi(x) \text{ pour } 0 < x < l$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pour } 0 < x < l, \ t > 0$$

$$\boxed{u(x,t) = f(x)g(t)}$$

$$f(x)\ g'(t) - Df''(x)\ g(t) = \ 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = cste = -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\boxed{\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l, \; t > 0$$

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

Condition aux limites **Homogènes**

- $u(x=0,t) = 0, \; t > 0$
- $u(x=l,t) = 0, \; t > 0$
- $u(x,0) = \varphi(x)$ pour $0 < x < l$

$$\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$$

Trouver une Base

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t) g_n(x)$$

$$\boxed{\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}}$$

Condition aux limites **Homogènes**

- $u(x=0,t)=0, \ t>0$
- $u(x=l,t)=0, \ t>0$
- $u(x,0)=\varphi(x)$ pour $0<x<l$

1 - Résolution en x

$$\begin{cases} f''(x) = -\lambda f(x) \\ f(x=0)=0 \quad f(x=l)=0 \end{cases}$$

- $\underline{\text{Si } \lambda = 0 :}$ $f(x) = ax+b$
  $f(0)=f(l)=0 \Longrightarrow a=b=0$

- $\underline{\text{Si } \lambda < 0 :}$ $\lambda = -k^2$
  $f(x) = ae^{kx}+be^{-kx}$
  $f(0)=f(l)=0 \Longrightarrow a=b=0$

- $\underline{\text{Si } \lambda > 0 :}$ $\lambda = +k^2$
  $f(x) = a\cos kx + b\sin kx$
  $f(0)=f(l)=0 \Longrightarrow a=0 \text{ et } b\sin kl = 0$

Résoudre

$$b \sin kl = 0$$

– $\underline{\text{Si } \lambda > 0 :}$ $\lambda = +k^2$

$f(x) = a \cos kx + b \sin kx$

$f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b \sin kl = 0$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}^*$$

et donc $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$

Dans ce cas les valeurs propres sont analytiques

Les fonctions de base en espace sont :

$$\boxed{f(x) = f_n(x) = \ sin(\frac{n\pi x}{l})}$$

$$\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$$

2 - Résolution en t

$$g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t)$$

$$g(t) = cste * e^{-\lambda \mathrm{D}t}$$

Condition aux limites **Homogènes**

- $u(x=0,t)=0, \;\; t>0$
- $u(x=l,t)=0, \;\; t>0$
- $u(x,0)=\varphi(x)$ pour $0<x<l$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Les fonctions de base en espace sont :

$$g_n(t) = c_n * e^{-\lambda_n Dt}$$

Méthode Spectrale

HLME509

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

Condition aux limites **Homogènes**

$$\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$$

- $u(x=0,t) = 0,\ t > 0$
- $u(x=l,t) = 0,\ t > 0$
- $u(x,0) = \varphi(x) \text{ pour } 0 < x < l$

$$\boxed{u_n(x,t) = sin(\frac{n\pi x}{l}) * c_n * e^{-\lambda_n Dt}}$$

3 - Déterminer c_n

$$u_n(x) = sin(\frac{n\Pi x}{l}) * c_n * e^{-\lambda_n Dt}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

La condition aux limites en temps :

$$u(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$$

3 - Déterminer c_n : Coefficient de Fourrier

On projette $\varphi(x)$ sur la base $u_n(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{n,m} \\
&= \frac{l}{2} c_m
\end{aligned}$$

Equation de la diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } 0 < x < l, \; t > 0$$

Condition aux limites

- $u(x = 0, t) = 0, \; t > 0$
- $u(x = l, t) = 0, \; t > 0$
- $u(x, 0) = \varphi(x)$ pour $0 < x < l$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\right] e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

Ecrire l' EDP

Chercher la solution comme un produit de fonctions

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

Déterminer des Condition aux limites **Homogènes**

Trouver une Base orthogonale en espace

Trouver une Base en temps

$$\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$$

Trouver Les coefficients de Fourier

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(t) g_n(x)$$

Reconstruire la solution

Sujets Projets

Licence Mécanique
Parcours McM

PROJET « Calcul Numérique en Mécanique»

Consultant : Loïc Daridon
Poste : 0 467 149 651
loic.daridon@univ-montp2.fr

Etude de la vibration d'une poutre

L'objectif de cette étude est dans un premier temps d'étudier le comportement d'un tube encastré de section constante dans un massif lors d'un chargement uni-axial cycle $F(t)=F_0\,\sin(\varpi_0 t)$. Vous mènerez une étude sur l'influence de paramètres tels que la variation de la section ou de la masse volumique (Figure1). Dans un deuxième temps, on étudiera l'influence d'une liaison par un élastomère, ayant un comportement visco-élastique sur la réponse de la structure. Une troisième étape, sera d'étudier de l'influence de la répartition des matériaux sur la réponse de la structure.

Cette étude sera abordée dans un premier temps par une méthode spectrale puis par une méthode numérique.

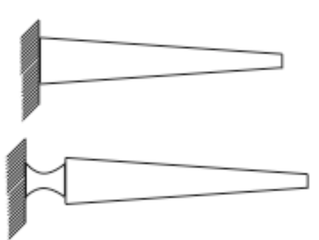


Figure 1 : Configuration à étudier

(a) (b)

Figure 2 : répartition à étudier

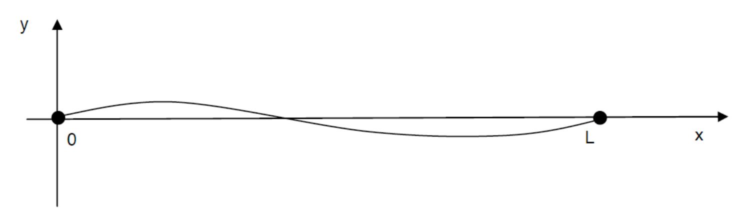
Licence Mécanique
Parcours McM

PROJET « Calcul Numérique en Mécanique»

Consultant : Loïc Daridon
Poste : 0 467 149 651
loic.daridon@univ-montp2.fr

Etude de la vibration d'une corde

On considère une corde élastique souple soumise à une tension 0 T et de masse linéique m , de longueur L. Cette corde est fixée en x = 0 et x = L et est écartée de sa position d'équilibre en t=0.



On vérifiera tout d'abord que, en l'absence d'effet dissipatif, l'ordonnée $y(x,t)$ de la corde en l'abscisse x et au temps t est solution de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y=0$$

où $c_0=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ est une vitesse de propagation des déformations de la corde.

Déterminer la solution théorique du problème et discuter l'effet des différentes grandeurs physiques caractérisant le problème. Que devient cette solution en présence de dissipation ?

Reproduire numériquement les résultats obtenus analytiquement. Reproduire un DO de piano et de guitare, puis une mélodie de votre choix.

Licence Mécanique
Parcours McM

PROJET « Calcul Numérique en Mécanique»

Consultant : Loïc Daridon
Poste : 0 467 149 651
loic.daridon@univ-montp2.fr

Propagation de la chaleur

L'objectif de cette étude est, à l'aide d'une méthode non destructive, de localiser la présence de défaut dans des fils (Figure 1). La présence d'un défaut dans ces fils peut se traduire par à l'apparition d'un source de chaleur lors d'une sollicitation mécanique, (traction uni-axial par exemple). Le câble étant isolé sur toute la longueur, les fuites auront lieu uniquement aux extrémités. Les seules mesures possibles se feront donc extrémités.

Dans un premier temps, nous déterminerons l'évolution de ces températures pour une source connue de la forme suivante $s(t)=S_0\delta(x-x_0)\sin(\varpi_0 t)$. Ce type de source peut être obtenu lors d'une sollicitation mécanique cyclique. Cette étude sera abordée dans un premier temps par une méthode spectrale puis par une méthode numérique.
Après une étude de l'influence des paramètres matériaux,.

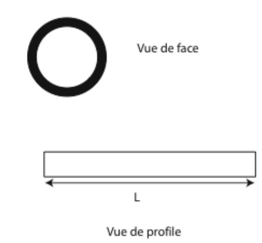


Figure1 :Schéma du câble à étudier