Expérimentations sur le modèle logistique

L3 prépa agro-véto HLMA509

Université de Montpellier – Faculté des Sciences

16 septembre 2020

Rappels

Le modèle logistique (normalisé) est donné par la fonction de croissance :

$$g(x) = rx(1-x)$$

où r est un paramètre strictement positif.

Il mène à l'étude d'une suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} q_0 > 0 & \text{condition initiale} \\ q_{n+1} = q_n + g(q_n) & \text{relation de récurrence} \end{cases}$$

On cherche à comprendre le comportement de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q_0 et r.

Logistique : expérimentations

Aller sur `https://www.desmos.com/calculator/unan9xh0og`

- modifier la fonction en $f(x) = x + ax(1 - x)$
- renommer a en r (optionnel)
- x_0 est notre population initiale

Exemples : qu'observez-vous ?

- prendre $r = 0.8$ et $x_0 = 0.1$, puis autres valeurs de x_0
- même chose avec $r = 1.5$ puis $r = 1.9$
- même chose avec $r = 2$
-
- même chose avec $r = 2.3$
- même chose avec $r = 2.7$
- et pour $3 < r < 4$?

Logistique : observations

`https://www.desmos.com/calculator/unan9xh0og`

- pour $r = 0.8$:
  - pour $x_0 = 0.1$: suite croissante, limite $\ell = 1$
  - même comportement pour $0 < x_0 < 1$
  - pour $1 < x_0 <??$: suite croissante à partir de $n = 1$, limite $\ell = 1$
  - combien vaut ?? ; explication ? calcul ?
- pour $r = 1.5$:
  - pour $x_0 = 0.1$: suite croissante, puis alternée, limite $\ell = 1$
  - même comportement pour tous les $x \in]0, ??[$
- même chose pour $r = 1.9$
- pour $r = 2.3$ et $x_0 = 0.1$: point périodique de période 2...
- pour $r = 2.5$ et $x_0 = 0.01$? $x_0 = 0.106$? ça devient compliqué... on ira le voir sur une autre appli plus tard...
- et pour $r > 3$??

Logistique : intervalle de stabilité

On vient de voir que, pour certaines valeurs de q_0 et r, la suite des q_n devient négative : modèle pas réaliste ! On cherche donc des conditions sur q_0 et r qui assurent que q_n reste toujours positif.

Théorème

Si $0 < r \leq 3$ et $0 < q_0 \leq (r+1)/r$, alors $0 < q_n \leq (r+1)/r$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration.

Par définition, $q_{n+1} = F(q_n)$ avec
$F(x) = x + rx(1-x) = -rx^2 + (1+r)x$.

- Étude de la fonction F : zéros, signe, variations
- Où la fonction F a-t-elle son maximum ? combien vaut-il ?
- Si $0 < r \leq 3$ et si $0 < x \leq (r+1)/r$, alors $(r+1)/4 \leq 1$... et donc $g(x) \leq (r+1)/r$
- D'où le résultat par une récurrence

□

Logistique : la fonction des mathématiciens

On a dit : le modèle logistique est donné par la fonction $F(p) = p + rp(1-p)$ (après avoir normalisé $K = 1$).

Posons $q_n := \frac{r}{1+r} p_n$, autrement dit $p_n = \frac{1+r}{r} p_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par q_n ?

C'est $q_{n+1} = (1+r)q_n(1-q_n)$.

D'où $q_{n+1} = G(q_n)$ avec $G(x) = (1+r)x(1-x)$. On a un peu simplifié la fonction F...

Les mathématiciens utilisent $G(x) = ax(1-x)$ et étudient le comportement de la « dynamique » de la suite définie par

$$x_0 \text{ donné}, \;\; x_{n+1} = G(x_n) \; \forall n \geq 0$$

en fonction de la condition initiale x_0 et du paramètre $a \in [0,4]$

Logistique : observations 2

`http://tuvalu.santafe.edu/~joshua/?section=3`

⚠ Ici on travaille avec la fonction logistique des mathématiciens : le paramètre devient $a = 1 + r$...

- pour $a = 3.3$:
  - il y a un point fixe non nul, qui vaut... $q = 23/33 = 0.6969...$
  - on arrive à voir ce point fixe graphiquement ? point fixe instable !
  - que se passe-t-il pour x_0 quelconque ? point périodique de période 2 : $f(q_1) = q_2$ et $f(q_2) = q_1$ pour $q_1 = 0.4794...$ et $q_2 = 0.8236...$
  - tracer le graphe de $g(g(q))$, qui devrait donc avoir deux points fixes q_1 et q_2 différents du point fixe de g
- pour $a = 3.5$
  - point fixe non nul :$q = 5/7$, instable
  - la plupart des conditions initiales tendent vers...une période 3
  - tracer le graphe de $g(g(g(q)))$, qui devrait avoir des points fixes

Logistique : de plus en plus complexe

- pour avec $a = 3.68725$ avec $x_0 = 0.2$ puis avec $x_0 = 0.1$... soyons patients...
- et pour $3 < a < 4$? 3.828 jusqu'à 3.8285... 3.8521738
- pour $a = 3.86$? laisser l'appli tourner très longtemps...

On s'approche, pour les valeurs de a proches de 4, du « chaos » : comportement à long terme difficile à décrire, grande sensibilité à la condition initiale.