Dynamique des populations

L3 prépa agro-véto HLMA509

Université de Montpellier – Faculté des Sciences

16 septembre 2020

Objectif

- étudier la dynamique de populations évoluant dans le temps
- modèles mathématiques pour décrire et prédire

Deux grands types de modèles :

- modèles à temps discret
  - pour les espèces à reproduction rythmée et synchronisée par cycles disjoints ; croissance par paliers
  - description par une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres ; $p_n =$ nombre d'individus à l'étape n
- modèles à temps continu
  - pour la reproduction « en continu » : reproduction non rythmée, recouvrement de générations...
  - description par une fonction f numérique ; $f(t) =$ nombre d'individus au temps t

Plan

Quatre grandes sections (chapitres) :

1. modèles discrets pour une population isolée ; étude de suites numériques
2. modèles discrets pour plusieurs populations en interaction ; étude de suites vectorielles ; matrices, diagonalisation
3. modèles continus pour une population isolée ; étude d' équations différentielles
4. modèles continus pour plusieurs populations en interaction ; étude de systèmes différentiels

Chapitre 1. Modèles discrets (une population)

- population unique isolée sans sous-groupes
- temps (étape) mesuré par un entier n
- $p_n =$ nombre d'individus au temps n
- $p_n \geq 0$ pour tout n...
- ... mais p_n pas forcément entier

Hypothèse de travail : p_{n+1} ne dépend que de p_n

- fonction de croissance f telle que :

$$p_{n+1} = p_n + f(p_n)$$

- ou encore :

$$p_{n+1} = F(p_n)$$

en posant $F(x) := x + f(x)$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On cherche donc à étudier une **suite définie par récurrence** :

- $p_0 > 0$ donné population initiale
- $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ ou $p_{n+1} = F(p_n)$ relation de récurrence

d'où la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Questions :

- variations : suite croissante ? décroissante ? alternance ?
- comportement à long terme : limite finie nulle (extinction), limite finie nou nulle (stabilisation), limite infinie (explosion), pas de limite ?

Limites possibles. Si $p_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, alors :

$$f(\ell) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad F(\ell) = \ell$$

(on suppose $f(t)$ continue)

Croissance linéaire

Modèle de Malthus (1766-1834) : fonction de croissance linéaire

$$f(p) = rp \qquad \text{où } r \text{ constante fixée}$$

Chaque individu de l'étape n contribue en proportion r à l'accroissement de la population

La suite (p_n) :

- $p_{n+1} = p_n + rp_n = (1+r)p_n$ pour tout $n \geq 0$
- on demande $r > -1$...
- $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique
- $p_n = (1+r)^n p_0$

Comportement en fonction de r :

- si $r > 0$: explosion
- si $r = 0$: constante
- si $-1 < r < 0$: extinction

Modèle linéaire : critiques

Limites du modèle linéaire :

- modèle linéaire avec $r > 0$: rien ne freine la croissance, explosion démographique
- pas réaliste à long terme : ressources pas infinies, compétition au sein de l'espèce
- mais parfois pertinent pour n petit et donc p_n petit (petite population dans un univers abondant en ressources)

Idée : modifier le modèle linéaire pour y incorporer des limitations excluant une explosion démographique

Croissance non linéaire : croissance logistique

Modèle logistique : fonction de croissance

$$f(p) = rp(1 - p/K)$$

- r = « croissance intrinsèque » indépendante de l'environnement
- K = « capacité biotique » du milieu (freine la croissance)

Le facteur $1 - p/K$ vient freiner la croissance lorsque $p > K$!

Suite définie par récurrence :

- $p_0 > 0$ donné
- $p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n/K)$

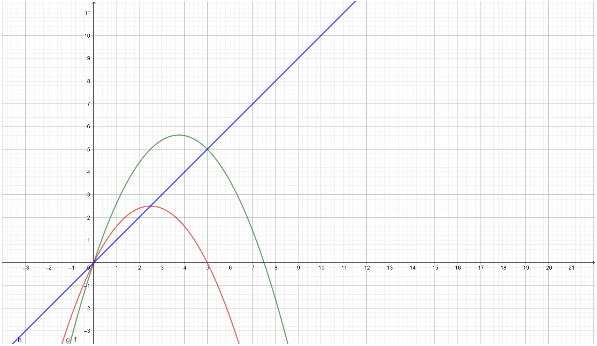
⚠ impossible de trouver une formule simple exprimant p_n en fonction de n, donc étude qualitative de la suite (p_n)

Logistique : étude de la fonction de croissance

Rappel : $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ ou encore $p_{n+1} = F(p_n)$

Ici $f(p) = rp(1 - p/K)$ et $F(p) = p + rp(1 - p/K)$

Exemple : $p = 2$ et $K = 5$



rouge = ? vert = ? bleu = ? points remarquables ? comment la population évolue-t-elle quand $0 < p < 5$? quand $p = 5$? quand $p > 5$?

Logistique : normalisation de K

Transformation pour simplifier l'étude mathématique : on se ramène au cas où $K = 1$

- poser $q_n =:= p_n/K$
- la suite (q_n) vérifie alors $q_{n+1} = q_n + rq_n(1 - q_n)$!

On suppose que $K = 1$ dans la suite...

Logistique : expérimentations

Aller sur `https://www.desmos.com/calculator/unan9xh0og`

- modifier la fonction en $f(x) = x + ax(1 - x)$
- renommer a en r si vous voulez
- x_0 est notre population initiale

Exemples : qu'observez-vous ?

- prendre $r = 0.8$ et $x_0 = 0.1$, puis autres valeurs de x_0
- même chose avec $r = 1.5$
- même chose avec $r = 2.5$
- même chose avec $r = 2.7$
- et pour $3 < r < 4$?

Logistique : observations

```
https://www.desmos.com/calculator/unan9xh0og
```

- pour $r = 0.8$:
  - pour $x_0 = 0.1$: suite croissante, limite $\ell = 1$
  - même comportement pour $0 < x_0 < 1$
  - pour $1 < x_0 <??$: suite croissante à partir de $n = 1$, limite $\ell = 1$
  - combien vaut ?? ; explication ? calcul ?
- pour $r = 1.5$:
  - pour $x_0 = 0.1$: suite croissante, puis alternée, limite $\ell = 1$
  - même comportement pour tous les $x \in]0, ??[$
- pour $r = 2.5$ et $x_0 = .01$? $x_0 = 0.106$? ça devient compliqué... on ira le voir sur une autre appli plus tard...
- et pour $r > 3$? ?