Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Exercices de révision

Exercice 1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Exprimer, en le démontrant, $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Une partie A de $\mathbb{R}$ est **discrète** si tous ses points sont isolés, c'est-à-dire si :

$$\forall a \in A, \exists r > 0 \quad A \cap]a-r, a+r[= \{a\}$$

1. Donner des exemples de parties de $\mathbb{R}$ qui soient à la fois dénombrables, d'intérieur vide, fermées et discrètes.
2. Montrer q'une partie discrète est nécessairement d'intérieur vide.
3. Une partie discrète est-elle nécessairement fermée ?
4. Une partie d'intérieur vide est-elle nécessairement discrète ?
5. Montrer qu'une partie dénombrable est d'intérieur vide.
6. Une partie d'intérieur vide est-elle nécessairement dénombrable ?

Exercice 4. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $f(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$, alors f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f admet des limites finies en $\pm\infty$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   a) $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$
   b) L'image réciproque par f de tout compact est compacte.

Exercice 5. Vrai ou Faux ? On parle des parties compactes de $\mathbb{R}$.

1. Une intersection finie de compacts est compacte.
2. Une intersection quelconque de compacts est compacte.

3. Une union finie de compacts est compacte.
4. Une union quelconque de compacts est compacte.
5. Le complémentaire d'un ouvert non borné est compact.

Exercice 6. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne.

1. Montrer que si $a \in \overline{A}$, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ n'est pas un voisinage de a.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide.

Exercice 7. On considère un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et un **recouvrement ouvert** $\mathscr{R}$ de $[a,b]$, c'est-à-dire une famille $\mathscr{R} = (U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Ici I est un ensemble d'indices quelconque. Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut extraire de $\mathscr{R}$ un sous-recouvrement **fini** de $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe une partie **finie** $J \subset I$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. Pour cela, posons :

$$A := \{x \in [a,+\infty[\,;\, \text{on peut extraire de } \mathscr{R} \text{ un sous-recouvrement fini de } [a,x]\}$$

1. Montrer que A n'est pas vide (quel est le réel qui appartient clairement à A ?)
2. Soit $s := \sup(A)$.
   a) Montrer que $s > b$ en raisonnant par l'absurde : si $s \in [a,b]$, alors il existe un $i \in I$ tel que $s \in U_i$, d'où un $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset U_i$; que dire alors de $[a, s-\varepsilon]$ puis de $[a, s+\varepsilon/2]$?
   b) Conclure.