

Université de Montpellier  
Master de Mathématiques  
Leçons de Mécanique des fluides.

Pascal Azérad ©

26 mars 2025



# Table des matières

<b>1 Cinématique et dynamique des fluides : un bref aperçu de mécanique de fluides.</b>	<b>5</b>
1.1 Description lagrangienne et eulerienne . . . . .	6
1.1.1 dérivée matérielle et accélération . . . . .	6
1.1.2 vorticité ou tourbillon . . . . .	7
1.2 Incompressibilité ou conservation du volume . . . . .	9
1.3 Conservation de la masse . . . . .	12
1.4 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	12
1.4.1 Contraintes dans un fluide . . . . .	13
1.4.2 Conditions limites . . . . .	17
1.5 Conservation de l'énergie . . . . .	19
1.6 Exemples d'écoulements calculables. . . . .	20
1.7 Nombre de Reynolds et turbulence. . . . .	22
1.7.1 adimensionnement des équations. . . . .	22
1.8 Turbulence . . . . .	23

## Préambule

Ce cours volontairement succinct poursuit les buts suivants :

- être assimilable en sept semaines par un étudiant de Master.
- être assimilable en sept jours par un mathématicien désireux de s’initier aux équations de Navier-Stokes (ENS)
- servir de tremplin pour une thèse.

Les ENS sont un exemple d’EDP multidimensionnelle ayant une signification physique profonde, présentant une non-linéarité (quadratique...), dont les inconnues (vecteur vitesse et scalaire pression) sont de nature très différentes. Elles fournissent un terrain d’apprentissage privilégié de techniques fructueuses pour bien d’autres EDP.<sup>1</sup> Si les écoulements plans sont bien connus, dans le cas de l’espace de nombreuses questions demeurent dont le fameux problème à 1M\$ du Clay institute [14].

Il existe relativement peu de traités “complets” sur la théorie des Equations de Navier-Stokes, cet opuscule, en établissant un choix délibéré ne vise pas l’exhaustivité, il vise plutôt la simplicité.<sup>2</sup> Les notions sont présentées sans afféterie, sans technicité inutile, mais nous avons cherché à présenter l’essentiel, en insistant sur l’interprétation mécanique. Ce cours présuppose des rudiments d’analyse fonctionnelle, ainsi qu’exposés par exemple dans [19, 17]. En particulier, les résultats classiques sur les espaces de Sobolev sont utilisés sans complexes.

Une bibliographie suggère des compléments au texte. Une spécificité du texte est la présence de commentaires heuristiques, signalés par le sigle

★ A méditer : Nous pensons en effet que les mathématiques ne se livrent pas seulement par la déduction ou la démonstration, mais surtout par l’interprétation vivante, qui ne s’élabore que lentement, progressivement. Ces commentaires ne sont donc pas destinés à être saisis d’emblée, ne doivent pas forcément être compris d’ailleurs, ils sont simplement proposés, et non imposés, pour faciliter l’appropriation de la théorie.

*Ce document est une première version, l’auteur est très reconnaissant pour toute erreur, coquille ou commentaire qu’on voudra bien lui adresser à*

`pascal.azerad@umontpellier.fr`

---

1. pour un exemple en traitement d’image, voir [8]

2. “Délire laborieux et appauvrissant que de composer de vastes livres, de développer en cinq cent pages une idée que l’on peut très bien exposer oralement en quelques minutes. Mieux vaut feindre que ces livres existent déjà et en offrir un résumé, un commentaire.” J.L. Borges, *Fictions*, Gallimard, trad. de *Ficciones*, SUR, Buenos Aires, 1944

# Chapitre 1

## Cinématique et dynamique des fluides : un bref aperçu de mécanique de fluides.

Il est navrant de constater que de nombreux mathématiciens travaillant sur les équations de Navier-Stokes dédaignent la mécanique des fluides. Ignorant sciemment les principes physiques dont découlent les équations, ils espèrent toutefois en percer le mystère. Vaine entreprise. Ils ont les mains pures mais ils n'ont pas de mains. Evidemment les ingénieurs moquant les difficultés mathématiques de ces équations et considérant l'analyse fonctionnelle comme un luxe gratuit dénué d'intérêt ne sont pas à meilleure enseigne. En quelque sorte, ils avancent les yeux volontairement bandés. Nous allons tenter de naviguer entre ces deux écueils. Pour commencer une

**Définition 1** *Un fluide est un milieu continu dans lequel les molécules sont "libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres"*

Parmi les fluides, on distingue les liquides et les gaz, nous verrons plus loin que la notion d'*incompressibilité* clarifie les choses. Cette définition est vague, il faudrait invoquer la physique statistique et la notion de "libre parcours moyen" pour une définition précise.

*Remarque.* On peut d'ailleurs déduire les équations de la mécanique des fluides des équations de Boltzmann ( Cf H. Grad). Toutefois la démonstration laisse encore à désirer d'un point de vue mathématique, voir la théorie des équations cinétiques (Bardos, Perthame, Golse ...).<sup>1</sup> □

Mentalement, il faut se représenter un fluide comme la réunion de particules fluides de taille suffisamment petites pour être assimilées à des points matériels de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , mais suffisamment grosse par rapport à l'échelle atomique. les physiciens parlent de V.E.R. (volume élémentaire représentatif).

---

1. La justification des équations de la mécanique des milieux continus à partir de l'équation de Boltzmann est l'objet du sixième problème de Hilbert. La réponse la plus complète à ce jour est l'article : The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels, François Golse, Laure Saint-Raymond, *Inventiones Mathematicae*, vol 155, 2004, pp 81-161.

## 1.1 Description lagrangienne et eulerienne

Nous décrirons l'état du fluide par :

- le domaine occupé par le fluide, supposé ouvert connexe noté  $\Omega$
- le vecteur vitesse du courant au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et à l'instant  $t$  noté  $\mathbf{u}(x, t)$
- la pression (scalaire) du fluide au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et à l'instant  $t$  notée  $p(x, t)$ .
- la densité (scalaire) du fluide au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et à l'instant  $t$  notée  $\rho(x, t)$ .

★ A méditer : A chaque instant fixé  $t$ , les vitesses du courant donnent un champ de vecteurs. Les lignes de champ ou caractéristiques associées sont appelées *lignes de courants*. Ce sont les solutions de l'ODE :  $\frac{d\xi}{ds} = \mathbf{u}(\xi(s), t)$

C'est l'approche usuelle, selon le point de vue d'Euler.

Une autre façon de voir, selon Lagrange, est de s'intéresser aux trajectoires individuelles des "particules fluides" étiquetées en fonction de leur position d'origine  $X$  à un instant initial. La trajectoire d'une particule est alors une courbe paramétrée  $t \mapsto x = \varphi(X, t)$  telle que  $\varphi(X, 0) = X$ .

★ A méditer : Imaginer par exemple que vous suivez la trajectoire d'un grain de pollen emporté par la rivière.

Selon ce point de vue, lorsque  $t \mapsto \varphi(X, t)$  est dérivable, le vecteur vitesse est simplement :  $\mathbf{U}(X, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t}$

Etant données les applications  $X \mapsto \varphi(X, t) = \varphi_t(X)$  supposées suffisamment régulières, pour revenir au point de vue eulérien, *en théorie* il suffit de les inverser.  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{U}(\varphi_t^{-1}(x), t)$ .

*Remarque.* Il ne faut pas confondre trajectoires et lignes de courants. Sauf dans le cas d'un écoulement stationnaire, i.e.  $\mathbf{u}(x, t) \equiv \mathbf{u}(x)$  les deux notions sont différentes.  $\square$

Pour construire les applications trajectoires  $\varphi(X, t)$ , à partir du point de vue eulérien, il faut résoudre l'ODE  $\frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\varphi(X, t), t)$  avec la condition initiale  $\varphi(X, 0) = X$ .

*Remarque.* C'est une EDO et non pas une EDP,  $X$  joue le rôle d'un paramètre.  $\square$

Nous utiliserons principalement le point de vue Euler, mais parfois il sera utile de recourir au point de vue de Lagrange.

### 1.1.1 dérivée matérielle et accélération

L'accélération des (ou de la...) particules fluides au point  $x$  à l'instant  $t$  est donnée par

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}$$

*Preuve.* considérons une particule fluide  $X$  que l'on suit dans son mouvement  $t \mapsto x(t) = \varphi(X, t)$ . L'accélération de cette particule est par définition

$$\frac{d\mathbf{u}(x(t), t)}{dt}.$$

Le théorème de différentiation des fonctions composées donne alors :

$$\frac{d\mathbf{u}(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k(t)}{dt}$$

Il suffit de noter que  $\frac{dx_k(t)}{dt} = u_k$  pour obtenir le résultat. ■

*Remarque.* la formule est bien plus simple dans le cadre lagrangien :

$$\Gamma(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi(X, t)}{\partial t^2}$$

□

*Remarque.* Diverses notations plus ou moins heureuses sont utilisées : la plus courante<sup>2</sup> est  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . Cela vient du fait que *formellement*  $\mathbf{u} \cdot \nabla = \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Mais  $\nabla \mathbf{u}$  est une matrice, et si l'on lit  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  il faut faire très attention... Car en fait  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  au sens usuel du produit matrice vecteur et pas  $\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ . On appelle le terme non linéaire *terme advectif* ou *inertiel*.

★ A méditer : essayez de comprendre le pourquoi de cette dénomination. La difficulté majeure du problème vient de ce terme non linéaire. □

On notera et appellera

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

la dérivée matérielle. De sorte que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df(\varphi(X, t), t)}{dt}$$

représente bien la dérivée d'une fonction attachée à une particule.<sup>3</sup>

### 1.1.2 vorticité ou tourbillon

**Définition 2** On appelle vecteur vorticité et on note  $\omega$  le rotationnel de  $\mathbf{u}$ .

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

*Remarque.* On notera que la vorticité a une nature différente en dimension deux ou trois<sup>4</sup>. En dimension 2,  $\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  est un scalaire. En dimension 3,  $\vec{\omega} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_i$  est un vecteur. □

**Exercice.** En dimension 4, on peut représenter  $\omega$  par une matrice antisymétrique.

**Exercice.** Vérifiez une écriture due à Lamb du terme non linéaire

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^2 / 2$$

.

2. malheureusement pas très heureuse

3. Certains auteurs l'appellent d'ailleurs dérivée particulaire.

4. En fait il s'agit d'une 2-forme différentielle obtenue par différentiation extérieure de la 1-forme circulation  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \sum_j u_j dx_j$

L'intérêt principal de la vorticité d'un champ de vecteur est qu'elle détecte les *tourbillons*.

**Exercice.** Considérer par exemple l'écoulement circulaire suivant :  $\mathbf{u} = (-y, x)$ , tracez (par exemple avec `gnuplot`) ses lignes de courants et calculez la vorticité correspondante. Faites de même avec l'écoulement de Smolarkiewicz :  $\mathbf{u}(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$  où  $(x, y) \in (-3, 3) \times (-3, 3)$ . Indication : on pourra introduire la *fonction de courant*  $\psi$  définie par  $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$ .

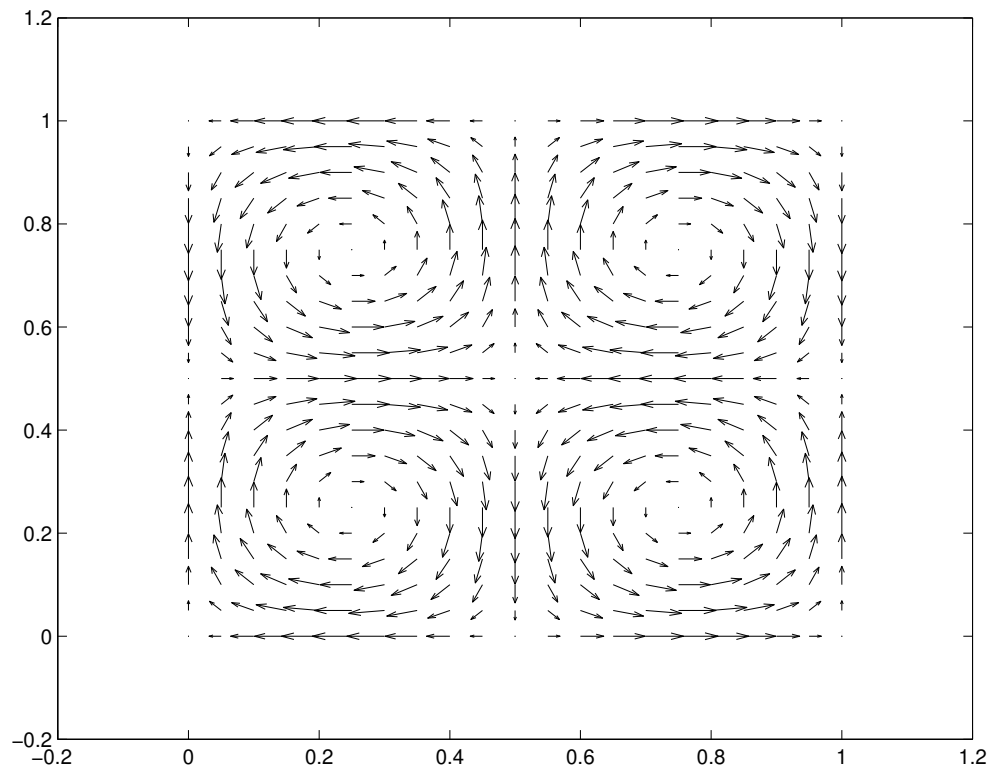


FIGURE 1.1 – écoulement de Smolarkiewicz

*Remarque.* Pour un écoulement remplissant tout l'espace  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , tel que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , la loi de Biot et Savart permet d'exprimer  $\mathbf{u}$  en fonction de  $\omega$

$$\mathbf{u}(x, t) = \int K(x, y) \times \omega(y, t) dy$$

avec

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{x-y}{|x-y|^3} & \text{si } n = 3, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2} & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

La question de la régularité est délicate. On peut montrer que si  $\omega$  est borné et hölder alors  $\mathbf{u}$  est  $\mathcal{C}^1$ .

□



## 1.2 Incompressibilité ou conservation du volume

la divergence du champ  $\mathbf{u}$  est

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert, on note  $\mathcal{V}_t = \phi_t(\mathcal{V})$  le volume matériel correspondant. On dit que l'écoulement conserve le volume ssi

$$|\mathcal{V}_t| = |\mathcal{V}|.$$

Comme par changement de variables :

$$|\mathcal{V}_t| = \int_{\mathcal{V}_t} dx = \int_{\mathcal{V}} |J(\varphi_t)| dX$$

la conservation du volume équivaut à  $|J(\varphi_t)| \equiv 1$ . La propriété de conservation du volume (on dit aussi que l'écoulement est isochore) se traduit simplement en terme de divergence.

**Proposition 1** *L'écoulement est isochore si et seulement si le champ de vitesse est incompressible :*

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

Plus précisément, si  $J(\varphi_t)$  désigne le jacobien de  $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$  il satisfait l'équation différentielle d'« expansion du volume » :

$$\frac{dJ(\varphi_t)}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot J(\varphi_t) \quad (1.1)$$

avec la condition initiale  $J(0) = 1$ .

*Preuve.* Cette preuve tirée du cours de F. Golse [3] et repose sur le joli lemme suivant.

**Lemma 1** *l'application  $\det : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$ . Sa différentielle en tout point  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  est donnée par*

$$d(\det)(A) \cdot M = \det A \cdot \operatorname{trace}(A^{-1}M)$$

Commençons par prouver le lemme. l'application  $\det$  est polynomiale sur  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$  donc  $C^\infty$ . D'autre part, la matrice  $A$  étant inversible

$$A + \epsilon M = A \cdot (I + \epsilon A^{-1}M)$$

donc en prenant le déterminant on obtient

$$\begin{aligned} \det(A + \epsilon M) &= \det A \det(I + \epsilon A^{-1}M) \\ &= \det(A) \cdot \epsilon^n \det\left(\frac{1}{\epsilon}I + A^{-1}M\right) \end{aligned}$$

Utilisons alors le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\det(\lambda.I - A) = \lambda^n - \operatorname{trace}A \cdot \lambda^{n-1} + O(\lambda^{n-2})$$

$$\det(A + \epsilon M) = \det(A) \epsilon^n \left( \frac{1}{\epsilon^n} + \text{trace}(A^{-1}M) \frac{1}{\epsilon^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\epsilon^{n-2}}\right) \right)$$

Finalement

$$\det(A + \epsilon M) = \det(A) (1 + \epsilon \text{trace}(A^{-1}M) + o(\epsilon)).$$

Le lemme est ainsi démontré. La preuve du théorème s'en déduit aisément : Notons pour simplifier  $J(t) = J(\varphi_t)$  et  $\nabla_X \varphi = \frac{\partial \varphi_i(\cdot, t)}{\partial X_j}$  en utilisant la différentielle d'une fonction composée

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d \det\left(\frac{\partial \varphi_i(\cdot, t)}{\partial X_j}\right)}{dt} = J(t) \text{trace}(\nabla_X \varphi)^{-1} \frac{\partial \nabla_X \varphi}{\partial t}$$

Remarquons que (en supposant l'écoulement régulier)

$$\frac{\partial \nabla_X \varphi}{\partial t} = \nabla_X \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla_X U(X, t)$$

Par le théorème de différentiation composée (avec des notations évidentes) :

$$\nabla_X U(X, t) = \nabla_x u \cdot \nabla_X \varphi.$$

D'où

$$\frac{dJ}{dt} = J(t) \text{trace}((\nabla_X \varphi)^{-1} \cdot \nabla_x u \cdot \nabla_X \varphi)$$

La propriété fondamentale d'invariance par conjugaison de la trace donne enfin

$$\frac{dJ}{dt} = J(t) \cdot \text{trace}(\nabla_x u)$$

Il reste à remarquer que  $\text{trace}(\nabla_x u) = \text{div } \mathbf{u}$ . ■

*Remarque.* B. Dacorogna m'a fait remarquer qu'on peut aussi rattacher l'équation différentielle d'expansion du volume à la propriété bien connue d'algèbre linéaire :

$$\det \exp A = e^{\text{Tr } A}$$

d'où l'on déduit par linéarité et continuité

$$\det \exp \int_0^t A(s) ds = e^{\int_0^t \text{Tr } A(s) ds}.$$

Considérons alors  $t \mapsto Y(t)$  *matrice* solution du système différentiel :

$$\dot{Y} = A(t) Y.$$

On sait que

$$Y(t) = \exp \int_0^t A(s) ds \cdot Y(0)$$

de sorte que  $\det Y(t) = \exp \int_0^t \text{Tr } A(s) ds \cdot \det Y(0)$  donc

$$\frac{d}{dt} \det Y(t) = \text{Tr } A(t) \cdot \det Y(t)$$

Il suffit alors d'appliquer cette formule à  $Y(t) = \frac{\partial \varphi_i(\cdot, t)}{\partial X_j} = \nabla_X \varphi$  et  $A(t) = \nabla_x u$ .  $\square$

Une application fondamentale du résultat (1.1) est le théorème du transport qui permet de dériver les intégrales sur des domaines matériels :

**Théorème 1** Soit  $\mathcal{V}$  un ouvert, et  $\mathcal{V}_t = \phi_t(\mathcal{V})$  le volume matériel correspondant. Soit  $f$  une fonction à valeur scalaire on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(x, t) dx = \int_{\mathcal{V}_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(f \cdot \mathbf{u})(x, t) \right) dx = \int_{\mathcal{V}_t} \left( \frac{Df}{Dt}(x, t) + f \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u})(x, t) \right) dx$$

*Preuve.* La preuve est basée sur la formule de changement de variable pour se ramener à un domaine fixe et la dérivation sous le signe somme.

$$\int_{\mathcal{V}_t} f(x, t) dx = \int_{\mathcal{V}} f(\varphi(X, t), t) |J(t)| dX$$

D'après l'équation différentielle (1.1), et la condition initiale évidente  $J(0) = 1$  (puisque  $\varphi(0) = Id$ ) on a

$$J(t) = \exp \int_0^t \operatorname{div} u(x(s), s) ds$$

donc  $J(t)$  est toujours strictement positif et on peut enlever la valeur absolue donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(\varphi(X, t), t) J(t) dX$$

En dérivant sous le signe  $\int$  (ce qui est légitime car dans ce chapitre les fonctions sont lisses) :

$$= \int_{\mathcal{V}} \frac{df(\varphi(X, t), t)}{dt} J(t) dX + \int_{\mathcal{V}} f(\varphi(X, t), t) \frac{dJ(t)}{dt} dX$$

Par définition  $\frac{Df}{Dt} = \frac{df(\varphi(X, t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$ . De plus  $\frac{dJ(t)}{dt} = \operatorname{div} u \cdot J(t)$ . Il ne reste plus qu'à faire le changement de variable inverse pour revenir à une intégrale sur  $\mathcal{V}_t$  et à remarquer que  $\mathbf{u} \cdot \nabla f + f \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(f \cdot \mathbf{u})$  pour obtenir le résultat annoncé.  $\blacksquare$

**Exercice.** soit un domaine plan étoilé, montrer que si  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle, alors il existe une fonction  $\psi$  appelée fonction de courant telle que  $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi$ . Dans ce cas, montrer que les lignes de courant sont les lignes de niveau<sup>5</sup> de  $\psi$ . Montrer que

$$\Delta \psi = \omega.$$

En déduire une preuve formelle de la loi de Biot-Savart. Indication : utiliser la solution fondamentale du Laplacien (dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta \frac{1}{4\pi r} = \delta_0$ )

---

5. on dit aussi isovaleurs

### 1.3 Conservation de la masse

Un principe fondamental de la mécanique des milieux continus est la conservation de la masse. Soit  $\rho = \rho(x, t)$  la densité du fluide au point  $x$  à l'instant  $t$ . la masse totale contenue dans un volume matériel  $\mathcal{V}_t$  est donnée par

$$m(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \, dx$$

D'après ce qui précède

$$\frac{dm(\mathcal{V}_t)}{dt} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u})(x, t) \, dx$$

le volume  $\mathcal{V}_t$  étant arbitraire on obtient l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u})(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

*Remarque.* On peut obtenir directement ce résultat en raisonnant sur un volume fixe  $\mathcal{V}$  comme suit. D'une part

$$\frac{d(\int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) \, dx)}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \, dx$$

D'autre part, la variation de masse ne peut provenir que des flux de masse à travers la paroi  $\partial\mathcal{V}$  de  $\mathcal{V}$ .

$$\frac{d(\int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) \, dx)}{dt} = - \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(x, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dx$$

Il suffit alors d'intégrer par parties

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \rho(x, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho(x, t) \mathbf{u}) \, dx$$

Comme  $\mathcal{V}$  est arbitraire, on obtient le résultat.<sup>6</sup> □

### 1.4 Conservation de la quantité de mouvement

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la cinématique et la conservation de la masse. Appliquons maintenant la loi fondamentale de la dynamique (loi de Newton)  $\vec{F} = m\vec{\gamma} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$  à un volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial\mathcal{V}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \, dS + \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \, dx$$

où

---

<sup>6</sup>. On notera que  $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} \rho(x, t) \, dx$  n'est alors pas constante, à moins que le fluide soit homogène, i.e.  $\rho$  soit constante. Ajoutons que, contrairement à une opinion assez répandue, un fluide incompressible n'est pas nécessairement à densité constante (fluides dits stratifiés).

- $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  désigne la résultante des forces intérieures s'exerçant au point  $x$  de  $\partial\mathcal{V}_t$  à l'instant  $t$
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  désigne la résultante des forces extérieures s'exerçant au point  $x$  de  $\mathcal{V}_t$  à l'instant  $t$

Considérons la variation de la quantité de mouvement du volume matériel. Nous allons prouver la

**Proposition 2**

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{u} dx = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dx$$

*Preuve.*

D'après le théorème du transport

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho u_i dx = \int_{\mathcal{V}_t} \left( \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \cdot \mathbf{u}) \right) dx \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Or

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} \rho + u_i \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_i$$

Utilisons maintenant la conservation de la masse (1.2), il vient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho u_i dx = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right) dx. \quad \blacksquare$$

*Remarque.* Tout se passe comme si le volume fluide avait une masse constante et subissait l'accélération  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . En particulier, la formule précédente est la même que  $\rho$  soit constant ou non.  $\square$

Nous aurons besoin de résultats de mécanique des milieux continus que nous rappelons sans preuve.

### 1.4.1 Contraintes dans un fluide

Le théorème de Cauchy dit que la résultante des forces intérieures exercées sur la surface  $\partial\mathcal{V}$  par le fluide environnant s'exprime :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{i,j})$  est une matrice  $n \times n$  *symétrique*.

Ainsi la contrainte élémentaire s'exerçant sur la surface  $dS$  est  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . L'opérateur  $\mathbf{n} \mapsto \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est appelé le tenseur des contraintes.<sup>7</sup> On admet (principe de Stokes) que dans un fluide le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est fonction seule du *tenseur des vitesses de déformations*

$$D = \operatorname{Def}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j}.$$

<sup>7</sup>. Ici aussi, il faudrait plutôt utiliser le langage des formes différentielles. Le tenseur des contraintes est en fait une 2-forme.

*Remarque.* Le terme “déformations” vient du fait suivant. Soit  $\mathbf{l}$  le vecteur reliant deux points matériels situés en  $x$  et  $x + l$  à l’instant  $t$ . Considérons leurs trajectoires respectives et étudions la variation de  $\mathbf{l}(t + s) = \varphi(x + l, s) - \varphi(x, s)$ . D’où en dérivant par rapport à  $s$  en  $s = 0$

$$\frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \mathbf{u}(x + l, t) - \mathbf{u}(x, t) = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{l} + o(\mathbf{l})$$

Décomposons la matrice  $\nabla \mathbf{u}$  en partie symétrique et antisymétrique

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)$$

de sorte que

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l} + \frac{1}{2} \omega \times \mathbf{l}$$

ainsi au premier ordre

$$\frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \underbrace{Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l}}_{\text{mouvement de déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega \times \mathbf{l}}_{\text{mouvement de rotation solide}}$$

$$\frac{D}{Dt} \|\mathbf{l}\|^2 = 2\mathbf{l} \cdot \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = 2\mathbf{l}^T Def(\mathbf{u}) \mathbf{l}$$

La forme quadratique de matrice  $Def(\mathbf{u})$  contrôle donc les déformations de longueurs. Ecrit autrement,

$$\mathbf{u}(x + \mathbf{l}, t) = \mathbf{u}(x, t) + \frac{1}{2} \omega \times \mathbf{l} + Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l} + o(\mathbf{l})$$

Les termes  $\mathbf{u}(x, t)$  et  $\frac{1}{2} \omega \times \mathbf{l}$  s’interprètent respectivement comme une translation de vecteur  $\mathbf{u}(x, t)$  et une rotation de vitesse angulaire  $\frac{1}{2} \omega$ . Ils n’introduisent aucune déformation, il s’agit d’un mouvement *rigide*. La déformation réside donc dans le terme  $Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l}$ .  $\square$

La fonction doit être objective, c’est à dire indépendante du repère choisi et isotrope. On peut alors prouver (théorème de Rivlin-Eriksen, Cf [5]) que la loi de comportement est nécessairement

$$\sigma = a \cdot I + b \cdot D + c \cdot D^2$$

avec  $a, b, c$  fonctions scalaires des invariants principaux de  $D$ .<sup>8</sup> Pour les fluides dits *newtoniens* incompressibles la loi de comportement est

$$\sigma = -p \cdot I + 2\mu \cdot D$$

avec  $p = p(x, t)$  la pression et  $\mu > 0$  la viscosité dynamique du fluide. Lorsque  $\mu = 0$ , le fluide est dit *parfait*.

Voici quelques valeurs de viscosité pour des fluides de référence.

<sup>8</sup> ce sont les quantités  $\sum_i \lambda_i$ ,  $\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$  et  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice symétrique  $D$ .

fluide	viscosité dynamique
air sec	$2 \cdot 10^{-5}$ Pa.s
eau douce	$10^{-3}$ Pa.s
huile moteur 10W30	$1.7 \cdot 10^{-1}$ Pa.s
glycérine	1.5 Pa.s

*Remarque.* Dans un fluide parfait, les contraintes sont uniquement dues à la pression et sont normales aux volumes fluides. Comme il n'y a pas de forces tangentielles, les forces ne peuvent générer aucune rotation. Par conséquent si l'écoulement est irrotationnel à l'instant initial, si le rotationnel des forces extérieures est nul, l'écoulement demeure irrotationnel par la suite (théorème de Lagrange).  $\square$

*Remarque.* Fluides parfait plan et analyse complexe. Soit un écoulement de fluide parfait incompressible *irrotationnel* dans un domaine simplement connexe. Soit  $\psi$  une fonction de courant telle que  $\nabla^\perp \psi = \mathbf{u}$ . Soit  $\phi$  un *potentiel* tel que  $\mathbf{u} = \nabla \phi$ . Justifiez l'existence de  $\phi$  et  $\psi$ . Montrer que la fonction  $z = x + iy \mapsto f(z) = \phi(x, y) - i\psi(x, y)$  est analytique. En déduire que  $\bar{\mathbf{u}} = u_1 - iu_2$  est holomorphe. Cette remarque est la base de l'étude des écoulements potentiels plans par transformation conforme.  $\square$

Transformons l'intégrale de surface en intégrant par partie avec la formule de la divergence :

$$\int_{\partial \mathcal{V}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) dS = \int_{\partial \mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}_t} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dx$$

La loi de Newton se traduit alors par l'équation de Cauchy

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dx = \int_{\mathcal{V}_t} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dx + \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) dx$$

Il reste à calculer (nous faisons la convention de sommation des indices répétés.)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &\equiv \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \operatorname{div} (-p \cdot I + 2\mu \cdot D) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Le fluide étant supposé incompressible, nous avons :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Il reste donc

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{gradient de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{u}}_{\text{forces dues à la viscosité}}$$

Rassemblant les considérations précédentes, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dx = \int_{\mathcal{V}_t} -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} dx$$

Comme le volume matériel est arbitraire, la conservation de la quantité de mouvement se traduit par

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

*Remarque.* si nous écrivons

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right) = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \cdot \mathbf{u})$$

Nous retrouvons la forme générale d'une loi de conservation : variation instantanée + divergence des flux = sources. En quelque sorte les forces s'interprètent comme des sources de quantité de mouvement. Les équations de Navier-Stokes ne sont rien d'autre qu'un système d'équations de convection diffusion des scalaires  $u_1, u_2, u_3$  par le champ  $\mathbf{u}$ . La nonlinéarité réside dans le fait que les scalaires advectés sont *actifs*, i.e. ils sont liés au champ qui les transporte.  $\square$

nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations de Navier-Stokes d'un fluide newtonien non homogène incompressible visqueux :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) & = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) & = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \end{cases}$$

Le système comporte  $n + 2$  équations scalaires et  $n + 2$  inconnues  $u_1, \dots, u_n, p$  et  $\rho$ .

Lorsque le fluide est homogène, i.e. lorsque la densité  $\rho$  est constante, la conservation de la masse est conséquence de l'incompressibilité et les équations de Navier-Stokes sont alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} & = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \end{cases}$$

La quantité  $\nu := \frac{\mu}{\rho}$  est appelée la *viscosité cinématique*.

*Remarque.* La pression  $p$  n'apparaît que sous forme  $\nabla p$ , elle ne peut être déterminée qu'à une constante près.  $\square$

Les équations de Navier-Stokes admettent un certain nombre de symétries, i.e. elles sont invariantes par les transformations suivantes, lorsque  $\mathbf{f} = 0$  :

- translation en espace  $x \leftarrow x + a$  et en temps  $t \leftarrow t + \tau$
- les isométries de l'espace (rotations et réflexions)  $x \leftarrow Ax$  avec  $A^T A = I$
- les transformations galiléennes  $x \leftarrow x - \mathbf{v}t$ ,  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}(x - \mathbf{v}t, t) + \mathbf{v}$  avec  $\mathbf{v} = \text{const}$
- le changement d'échelle  $x \leftarrow \lambda x$ ,  $t \leftarrow \lambda^2 t$ ,  $\mathbf{u} \leftarrow \lambda \mathbf{u}$ ,  $p \leftarrow \lambda^2 p$

**Exercice.** Montrer la symétrie suivante des ENS dans le cas d'un fluide homogène où les forces extérieures sont nulles. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}, p$  une solution des ENS.  $\mathbf{u}_\lambda(x, t) = \lambda \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t)$ ,  $p_\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$  est encore solution. Jean Leray a posé la conjecture de l'existence de solutions self-similaires. Un problème résolu il y a peu par Malek-Ruzicka-Necas concerne la non-existence de solutions self-similaires respectant l'inégalité d'énergie.

Il faut compléter le système précédent par des *conditions initiales et aux limites*.



Comme condition initiale, on prend  $\mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0$  un champ de vitesse donné à divergence nulle et, dans le cas inhomogène  $\rho(\cdot, 0) = \rho_0$ . Comme la dérivée temporelle de la pression n'apparaît pas donc la pression ne satisfait pas un problème d'évolution. On ne peut donc prescrire  $p(\cdot, 0) = p_0$ .

### 1.4.2 Conditions limites

Les principales conditions limites *cinématiques* (portant sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ ) d'un écoulement limité par une paroi *immobile* sont :

- cas des fluides visqueux : adhérence à la paroi  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$
- cas des fluides parfaits : glissement imperméable  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

*Remarque.* On peut aussi prescrire des conditions limites *dynamiques* (portant sur le champ de contraintes  $\sigma \mathbf{n}$ ) par exemple  $\sigma \mathbf{n} = 0$  sur une surface libre.

On peut enfin mélanger et prescrire par exemple  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $\sigma_{nt} = (\sigma \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$  ou  $u_t = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  et  $\sigma_{nn} = (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ .

Notons enfin que ces conditions limites portant sur les contraintes sont *naturelles* car elles peuvent se déduire de la *forme faible* des équations, formulation qui traduit le principe variationnel dit des "vitesses virtuelles". Par exemple, traitons le cas d'équilibre stationnaire

$$\operatorname{div} \sigma + \rho f = 0$$

et imposons par exemple la condition cinématique  $u \cdot n = 0$ . La forme faible est obtenue en multipliant l'équation par une vitesse virtuelle (fonction test) et en intégrant par parties sur le domaine

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + \rho f) \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \sigma : \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v \, dS + \int_{\Omega} \rho f \cdot v \, dx \quad \forall v \text{ tel que } v \cdot n = 0$$

Choisissons comme forme faible :

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \rho f \cdot v \, dx \quad \forall v \text{ tel que } v \cdot n = 0$$

ce qui revient à imposer la nullité du terme de bord :  $\int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v \, dS = 0$  et ceci  $\forall v$  t.q.  $v \cdot n = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$ . Sur le bord, on a donc imposé sous forme faible  $\sigma n \cdot v = \sigma_{nt} v_t + \sigma_{nn} v \cdot n = \sigma_{nt} v_t = 0$  car les vitesses virtuelles vérifient  $v \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Comme ceci est valable  $\forall v$ , il faut donc que  $\sigma_{n,t} = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$  qui est la condition limite *naturelle* associée à  $u \cdot n = 0$  et la formulation faible sans terme de bord. □

**Exercice.** On suppose que le fluide est au repos et soumis à la seule pesanteur  $\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ . Retrouver la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$p - p_0 = \rho g h.$$

Retrouver également l'expression de la poussée d'Archimède.

**Exercice.** Démontrer la relation de Bernoulli : Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait homogène incompressible soumis à un champ de forces dérivant d'un potentiel  $\mathcal{U}$ , la quantité

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathcal{U}$$

est constante le long des lignes de courant. Ce “principe” permet d’expliquer “heuristiquement” de nombreux phénomènes hydrodynamiques ( pourquoi les voiliers peuvent remonter le vent au près, trajectoire des balles liftées au tennis, portance des ailes d’avions ...) [20] indication : utiliser la relation de Lamb

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^2 / 2$$

Lorsque l’écoulement est irrotationnel, mais pas nécessairement stationnaire, nous avons vu que  $\mathbf{u} = \nabla \phi$ . Montrer alors que

$$\partial_t \phi + \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathcal{U} = C(t)$$

est constant à chaque instant dans *tout l’écoulement*.

**Exercice.** Dans un écoulement parfait, prouver la conservation de la circulation le long des lignes matérielles (théorème de Kelvin-Helmholtz) : Si  $\mathcal{C}_t = \phi_t(\mathcal{C})$  est une courbe matérielle,  $\int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \text{const}$

**Exercice.** Prouver que, en dimension 2, la vorticité  $\omega$  satisfait l’équation de convection-diffusion scalaire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = \nabla \times \mathbf{f}$$

alors qu’en dimension 3, elle vérifie l’équation vectorielle :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \omega = \nabla \times \mathbf{f}$$

Montrer que :  $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = Def(\mathbf{u}) \cdot \omega$  au sens du produit matrice-vecteur usuel. Le terme  $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est responsable du “vortex-stretching” :<sup>9</sup>  $Def(\mathbf{u})$  est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable. De plus la trace de  $Def(\mathbf{u})$  est nulle (c’est la divergence de  $\mathbf{u}$ ) donc une des valeurs propres est strictement positive. Si on néglige l’effet de la dissipation visqueuse, et en l’absence de forces extérieures, l’équation de la vorticité s’écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = Def(\mathbf{u})\omega$$

Si  $\omega$  est colinéaire à une direction propre de  $Def(\mathbf{u})$  associée à une valeur propre strictement positive,  $\omega$  subit une amplification exponentielle et peut “exploser”. Ce phénomène est typique des écoulements 3D et est peut-être responsable de l’apparition éventuelle de singularités.

**Exercice.** Conservation de l’hélicité (Théorème de J.J. Moreau). La quantité

$$\int_V \omega \cdot \mathbf{u} = \mathcal{H}$$

est appelée l’hélicité. Montrer que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_{\partial V} (\mathbf{u}^2 / 2 + p / \rho) \omega \cdot \mathbf{n} - 2\nu \int_V \omega \cdot \text{rot } \omega$$

En déduire que si  $\omega \cdot \mathbf{n}$  s’annule sur  $\partial V$  et si  $\nu = 0$  l’hélicité est une quantité conservée. Cette quantité a été découverte en 1961 par J.J. Moreau (Univ. Montpellier). Elle suscite un grand intérêt pour l’étude des écoulements turbulents. En effet la présence d’hélicité peut favoriser le vortex-stretching.<sup>10</sup>

9. littéralement étirement des tourbillons.

10. il y a ici un paradoxe à creuser : la présence d’hélicité favorise l’étirement des vortex,

## 1.5 Conservation de l'énergie

Considérons un fluide homogène newtonien incompressible remplissant un domaine  $\Omega$ . Si l'on multiplie scalairement au sens  $L^2$  les ENS par  $\mathbf{u}$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} + \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (1.4)$$

Intégrons par parties

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

L'incompressibilité, et la condition limite à la paroi entraînent que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0$$

Les forces de pression ne "travaillent pas"! De même le terme visqueux

$$\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$$

avec la condition limite d'adhérence  $\mathbf{u} = 0$  sur le bord, il reste

$$\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2$$

où la notation  $A : B = \operatorname{Tr}(AB^T) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$  désigne le produit scalaire des matrices, la norme euclidienne correspondante étant la norme de Frobenius.

Avec le théorème de dérivation sous le signe  $\int$  transformons maintenant le terme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2$$

Il reste le terme non-linéaire qui vérifie une propriété remarquable d'antisymétrie.

**Proposition 3** soit  $\mathbf{a}$  un champ incompressible tel que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur le bord du domaine et deux fonctions scalaires  $\mathcal{C}^1$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi) \psi = - \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) \varphi$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que puisque  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ ,

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{a})$$

La formule de la divergence donne alors :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \varphi \cdot \mathbf{a}) \psi = - \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) + \int_{\partial \Omega} \varphi \psi \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$$

la condition au bord  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$  permet de conclure. ■

mais d'après l'expression de Lamb, dans ce cas le terme advectif est quasi-conservatif i.e. approximativement un gradient.

En appliquant cette proposition à  $\phi = \psi = u_j$  on obtient

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

L'équation (1.4) devient alors :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2}_{\text{variation instantanée d'énergie cinétique}} = \underbrace{-\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2}_{\text{dissipation visqueuse}} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}_{\text{puissance fournie par les forces extérieures}} \quad (1.5)$$

On voit sur cette équation que le terme  $\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}$  a un effet dissipatif d'autant plus grand que la viscosité est élevée.

*Remarque.* Nous verrons ultérieurement que cette égalité d'énergie, que nous avons obtenue en supposant que le champ  $\mathbf{u}$  était assez "régulier" pour dériver sous le signe somme, intégrer par parties. . . n'est en fait rigoureusement démontrée que dans le cas des écoulements plans, ou pour certains types de solutions dites *fortes* en dimension 3. En revanche nous montrerons que *l'inégalité* est vérifiée pour des solutions *faibles* en dimension 3.

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \leq -\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (1.6)$$

□

## 1.6 Exemples d'écoulements calculables.

Dans certains cas simples présentant des symétries, on peut calculer analytiquement l'écoulement. Les écoulements en question sont laminaires et le terme non linéaire est nul.

### L'écoulement de Couette plan.

Considérons un fluide en écoulement entre les parois planes  $y = 0$  et  $y = h$ . On suppose que la paroi  $y = 0$  est immobile, tandis que la paroi  $y = h$  est animée d'une vitesse constante  $\vec{V} = V \cdot \mathbf{e}_x$ .

Le champ  $\mathbf{u} = Vy/h \cdot \mathbf{e}_x = V/h(y, 0, 0)$  et une pression  $p = \text{constante}$  sont une solution stationnaire des ENS vérifiant les conditions limites d'adhérence aux parois. *Vérifiez le.*

Le profil de vitesse est *linéaire* : Il est intéressant de noter que l'écoulement engendre une force de cisaillement (une contrainte tangentielle) sur la paroi  $y = 0$

### L'écoulement de Poiseuille.

Considérons pour simplifier une conduite plane occupant le domaine  $0 < y < h$ ,  $0 < x < L$  avec  $L \gg h$  de sorte qu'on peut négliger les extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ . On suppose donnés  $p(x = 0) > p(x = L)$  de sorte que  $\frac{\Delta P}{L} = (p(x = L) - p(x = 0))/L < 0$  (chute linéique de pression). Le champ des vitesses solutions est

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\nu} \frac{\Delta P}{L} y(h-y) \cdot \mathbf{e}_x$$

Le profil est *parabolique*, avec un maximum au milieu  $y = h/2$ . La pression décroît linéairement en  $x$  :

$$p = p(x) = p_0 + \frac{\Delta P}{L} x.$$

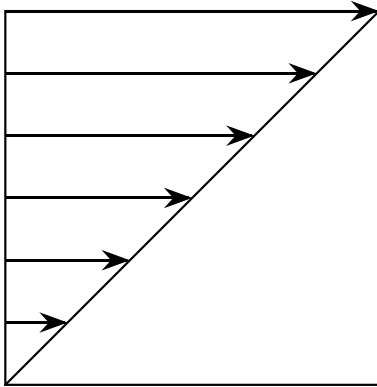


FIGURE 1.2 – écoulement de Couette plan

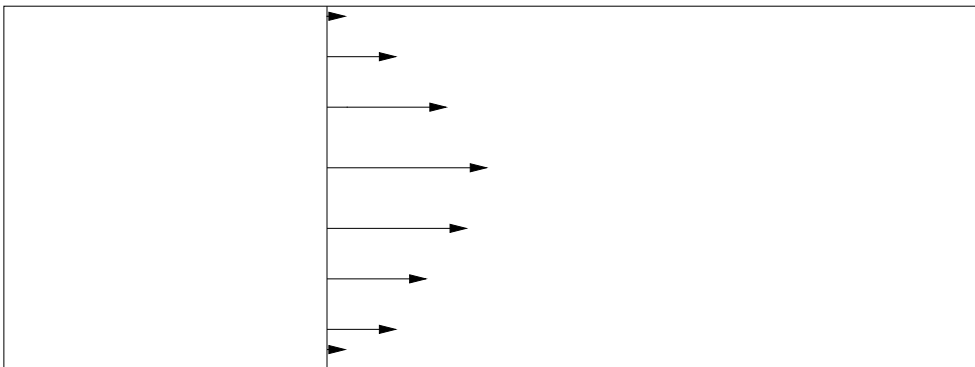


FIGURE 1.3 – écoulement de Poiseuille

Les calculs sont analogues pour une conduite cylindrique de section circulaire de rayon  $R$ . On peut calculer le débit à travers une section. La formule de Hagen-Poiseuille montre qu'il est proportionnel à  $\Delta P/L$  et  $R^4$  et inversement proportionnel à  $\nu$ . Cela permet de mesurer expérimentalement la viscosité des fluides (rhéométrie). Il y a quelques cas plus complexes, Cf Landau-Lifshitz [4]

## 1.7 Nombre de Reynolds et turbulence.

### 1.7.1 adimensionnement des équations.

Supposons que le fluide soit à densité constante  $\rho$ , les ENS s'écrivent (quitte à changer  $p$  en  $p/\rho$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{cases}$$

Le coefficient  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique ou moléculaire du fluide. A titre indicatif pour l'eau  $\nu \approx 10^{-4} m^2.s^{-1}$ . Introduisons des *grandeurs de référence*, (ou échelles caractéristiques) Soit  $L$  une longueur de référence, par exemple le diamètre de  $\Omega$ , ou de  $\Omega^c$  (la longueur de la coque d'un navire ...). Ensuite on peut se donner ou bien une durée de référence  $T$  ou encore une  $U$  une vitesse de référence (par exemple la vitesse "moyenne" du courant) en respectant évidemment le lien  $U = \frac{L}{T}$ .

Introduisons les coordonnées "adimensionnées"

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}$$

et les inconnues

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad \hat{p} = \frac{p}{U^2}$$

et les forces extérieures  $\hat{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}T^2}{L}$

On a  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}$  et  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$  de sorte que les ENS se transforment en

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} &= -\nabla \hat{p} + \frac{\nu T}{L^2} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}} \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} &= 0 \end{cases}$$

Introduisons le nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds

$$Re = UL/\nu$$

on a

$$1/Re = \frac{\nu T}{L^2}$$

de sorte que les ENS s'écrivent (en enlevant les "chapeaux")

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{cases}$$

C'est sous cette forme adimensionnée que nous les écrirons le plus souvent. Reprenons l'égalité d'énergie (1.6 et supposons les forces extérieures nulles ou

dérivant d'un potentiel  $\mathbf{f} = -\nabla\mathcal{U}$  de sorte que le terme  $\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  soit nul (intégrer par parties et utiliser l'incompressibilité). On obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \leq -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \|\nabla\mathbf{u}\|^2$$

Supposons que  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$ . Nous verrons dans le prochain chapitre que c'est l'espace fonctionnel naturel pour  $\mathbf{u}$ . Utilisons l'inégalité de Poincaré-Friedrichs :

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C \|\nabla\varphi\|_{L^2}$$

En posant  $y(t) = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2$ , nous obtenons l'inéquation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} \leq -\frac{\alpha}{Re} y(t), \quad y(0) = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2$$

où  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0, \cdot)$  désigne la vitesse initiale du fluide. En multipliant par le facteur intégrant  $\exp \frac{\alpha t}{Re}$

$$\frac{d}{dt} y(t) \exp \frac{\alpha t}{Re} \leq 0$$

d'où  $y(t) \leq y(0) \exp \frac{-\alpha t}{Re}$  ou encore

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\frac{-\alpha t}{Re}\right)$$

On voit bien l'effet de la dissipation visqueuse : quelle que soit la vitesse initiale, le fluide tend vers l'état au repos, avec un amortissement exponentiel. C'est pour cela que le café une fois remué ne tourne pas indéfiniment. . .

## 1.8 Turbulence

On voit que lorsque  $Re \gg 1$  le terme de diffusion  $\frac{1}{Re} \Delta\mathbf{u}$  "risque"<sup>11</sup> d'être petit par rapport au terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . La non linéarité va prédominer et l'écoulement va être complexe. On constate en effet que l'écoulement devient "turbulent" à partir de  $Re \approx 2000$ . Nous renvoyons à l'ouvrage [18] pour des compléments sur la turbulence. Inversement, lorsque  $Re \sim 1$  le terme de diffusion va prépondérer et l'écoulement sera très régulier "laminaire". On pourra même dans le cas des écoulements dits rampants (creeping flows) par exemple les glaciers ( $Re \ll 1$ ) négliger complètement le terme non linéaire. On obtient alors le système de Stokes qui fait l'objet du chapitre suivant.

---

11. les choses ne sont pas si simples évidemment, en particulier au voisinage des parois à cause des phénomènes de couche limite.





# Bibliographie

- [1] J. Leray, Essai sur l'écoulement d'un fluide visqueux que limitent des ârois, *J. Math. Pures Appl.*, 13 (1934), 331-418
- [2] Encyclopédie Universalis, "Equations aux dérivées partielles", article de C. Bardos
- [3] F. Golse, cours en ligne [www.ann.jussieu.fr/golse](http://www.ann.jussieu.fr/golse)
- [4] L. Landau, E. Lifshitz, Mécanique des fluides, Mir, 1971
- [5] P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, volume 1, North-Holland, 1988
- [6] G. Duvaut, Mécanique des milieux continus, Masson, 1990
- [7] Batchelor, Introduction to fluid mechanics, Cambridge University Press
- [8] F. Catte, P.L. Lions, J.M. Morel, T. Coll, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion* SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), no. 1, 182–193.
- [9] A. Chorin J. E. Marsden, A mathematical introduction to fluid mechanics, 3rd ed. 1993, Springer
- [10] R. Temam, Navier-Stokes equations, North-Holland Elsevier, 2nd ed. 1984
- [11] V. Girault, P. A. Raviart, Finite Elements methods for Navier-Stokes equations, Springer-Verlag, 1986
- [12] P. Constantin and C. Foias, Navier Stokes equations, University of Chicago Press, 1989
- [13] Introduction to Oceanography, Luc Tartar, Carnegie-Mellon Univ., 1999, <http://www.math.cmu.edu/cna/publications.html>
- [14] Millenium Prize, <http://www.claymath.org>
- [15] C. Doering, Applied Navier-Stokes equations, Cambridge univ. press, 98
- [16] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon Breach, 1968
- [17] S. Kesavan, functional analysis and applications, Wiley eastern limited, 1989.
- [18] A. Tsinober, An informal introduction to turbulence, Kluwer, 2001.
- [19] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson
- [20] D. Salin et J. Martin, La mécanique des fluide, Coll. 128, Nathan Univ 1997