

TD 1. UE Notions de mécanique pour les mathématiciens

Exercice. Vérifiez une écriture due à Horace Lamb du terme non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla(|\mathbf{u}|^2/2)$ la vorticité étant donnée par $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$.

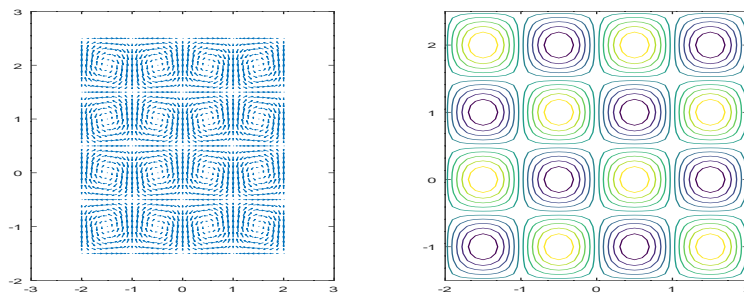
Exercice. Soit \mathbf{u} un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 . Montrer que $(\nabla \times (\nabla \mathbf{u})^T)^T = -\nabla(\nabla \times \mathbf{u})$. En déduire que $\text{curl} \left((\text{curl}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T))^T \right) = 0$.

Exercice. Considérer l'écoulement plan suivant : $\mathbf{u} = (-y, x)$, tracez ses lignes de courants et calculer la vorticité correspondante.

Faire de même avec l'écoulement de Rankine:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2)) & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \\ (-y, x) & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Faire de même avec l'écoulement de Smolarkiewicz : $\mathbf{u}(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$ où $(x, y) \in (-2, 2) \times (-1.5, 2.5)$. Indication : on pourra calculer la *fonction de courant* ψ définie par $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$. La figure représente l'écoulement de Smolarkiewicz: à gauche le *champ des vitesses*, à droite les *isovaleurs de la fonction de courant*, tracés avec *octave*.



Exercice. Pour un écoulement régulier remplissant tout l'espace \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, supposé de vitesse nulle à l'infini et tel que $\text{div } \mathbf{u} = 0$, démontrer la loi de Biot et Savart qui permet d'exprimer \mathbf{u} en fonction de ω

$$\mathbf{u}(x, t) = - \int K(x - y) \times \omega(y, t) dy$$

avec

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3} & \text{si } n = 3, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

Indications: en dimension 2, utilisez la fonction de courant. En dimension 3, utiliser que $\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$. Enfin utiliser la solution fondamentale du laplacien, c'est à dire la fonction G solution de $\Delta G = \delta$ au sens des distributions.