UNIVERSITE de MONTPELLIER. **M1 Manu 2024-2025**

TD 1. UE Notions de mécanique pour les mathématiciens

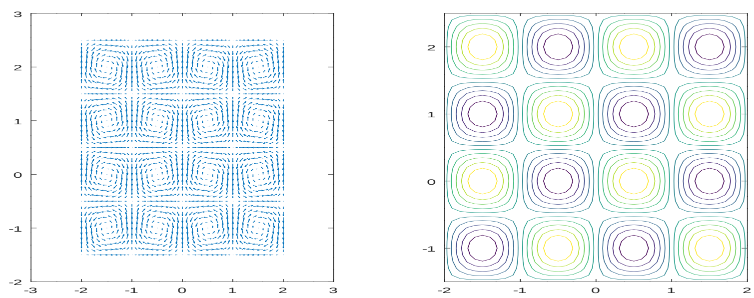
1. Vérifiez une écriture due à Horace Lamb: $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \omega\times\mathbf{u} + \nabla(|\mathbf{u}|^2/2)$ la vorticité étant donnée par $\omega = \nabla \times u$.

2. Soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(\nabla \times (\nabla\mathbf{u})^T)^T = -\nabla(\nabla\times\mathbf{u})$. En déduire que $\operatorname{curl}\left(\left(\operatorname{curl}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\right)^T\right) = 0$.
   C'est la condition de *Donati* pour qu'un champ de vecteur soit un *gradient symétrisé.*

3. Considérer l'écoulement plan suivant : $\mathbf{u} = (-y, x)$, tracez ses lignes de courants et calculer la vorticité correspondante.

   Faire de même avec l'écoulement de Rankine:
   $u = \begin{cases} (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2)) & \text{si} \quad x^2+y^2 \geq 1 \\ (-y, x) & \text{si} \quad x^2+y^2 < 1 \end{cases}$

   Faire de même avec l'écoulement de Smolarkiewicz : $\mathbf{u}(x,y) = (\sin(\pi x)\sin(\pi y), \cos(\pi x)\cos(\pi$
   où $(x,y) \in (-2,2)\times(-1.5,2.5)$. Indication : on pourra calculer la *fonction de courant* ψ définie par $\mathbf{u} = \nabla^{\perp}\psi = (-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x})$. La figure représente l'écoulement de Smolarkiewicz: à gauche le *champ des vitesses*, à droite les *isovaleurs de la fonction de courant*, tracés avec `octave`.



4. Pour un écoulement régulier remplissant tout l'espace $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, supposé de vitesse nulle à l'infini et tel que $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, démontrer la loi

de Biot et Savart qui permet d'exprimer $\mathbf{u}$ en fonction de ω

$$\mathbf{u}(x,t) = -\int K(x-y)\times\omega(y,t)dy$$

avec

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3} & \text{si } n=3, \\ \frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2} & \text{si } n=2, \end{cases}$$

Indications: en dimension 2, utilisez la fonction de courant. En dimension 3, utiliser que $\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})$. Enfin utiliser la solution fondamentale du laplacien, c'est à dire la fonction G solution de $\Delta G = \delta$ au sens des distributions.

5. Conservation de la circulation (Théorème de Kelvin). On considère un fluide parfait en écoulement. Soit un lacet (courbe fermée) C et le lacet matériel $C_t = f(C,t)$ correspondant (voir fig. 5). Démontrer que la circulation de la vitesse le long de C_t est constante au cours du temps.

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t}\mathbf{u}\cdot ds = const.$$

Indication: commencer par prouver le lemme:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{C_t}\mathbf{u}\cdot ds\right) = \int_{C_t}\frac{D}{Dt}\mathbf{u}\cdot ds.$$

En déduire que le flux de la vorticité à travers une surface entraînée par le fluide est constant au cours du temps.

$$\iint_{C_t}(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,dS = const.$$