Topologie des espaces métriques
HLMA502 2020-21

David Théret

31 décembre 2020

Pictogrammes

désigne un point important

désigne une démonstration ou un exercice que vous devez avoir compris et savoir refaire sans indication lors d'une évaluation.

désigne une démonstration ou un exercice plus difficile, exigible avec des indications précises lors d'une évaluation.

désigne une démonstration ou un exercice très difficile, non exigible lors d'une évaluation.

désigne un point que vous devez savoir compléter (exemple, exercice, démonstration) ; parfois utilisé à l'intérieur des démonstrations) ; exigible lors d'une évaluation.

Introduction

Distance, espaces métriques En 1907, Fréchet définit la notion de *distance*, dans le but d'étendre et unifier les concepts de limite de suite et de fonction continue à des espaces autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$: des espaces dont les « points » sont des fonctions, des suites, des courbes, etc.

> *La notion de fonction ainsi comprise a été progressivement étendue dans plusieurs directions [...] et en particulier au point de vue de ce qu'on doit prendre pour variable. Depuis longtemps, on a considéré des fonctions de deux, de trois, ou même de n variables numériques. Les autres généralisations sont plus récentes. Ainsi, M. Le Roux a été amené à étudier des fonctions dont la valeur dépend non plus de n, mais d'une suite infinie de variables indépendantes. MM. Volterra et Arzelà paraissent avoir été les premiers à étudier systématiquement les fonctions dont la valeur dépend de la position et de la forme d'une ligne variable. M Hadamard a considéré une classe particulière de fonctions dont la variable est la forme d'une fonction ordinaire.*
> [M. Fréchet, 1907]

Voisinages, espaces topologiques Ces notions sont formalisées par Hausdorff en 1914. Se donner un espace topologique, c'est se donner un ensemble X et, pour chaque $x \in X$, une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X appelées « voisinages de x ». Intuitivement, un voisinage de x est une partie qui « entoure » complètement x, une partie dans laquelle il faut obligatoirement entrer si on veut se rapprocher de plus en plus de x. Et, précisément, c'est à partir de cette notion de voisinage que l'on définit la convergence : une suite de points de X converge vers $x \in X$ si elle entre définitivement dans tout voisinage de x.

Quelles sont les conditions que doivent vérifier les voisinages ?

1. Tout point $x \in X$ possède au moins un voisinage.
2. Tout voisinage de x contient x.
3. Tout sur-ensemble d'un voisinage de x est un voisinage de x.
4. L'intersection de deux voisinages de x est encore un voisinage de x.
5. La dernière condition dit que tout voisinage d'un point est également voisinage des points « suffisamment proches » de ce point : tout voisinage V de $x \in X$ contient un voisinage W de x tel que V est un voisinage de tout point de W.

Ouverts Finalement, ces sont les ouverts qui vont s'imposer dans les définitions modernes : un ouvert est une partie qui est voisinage de tous ses points. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les ouverts ? Nous le verrons dans le chapitre « Espaces topologiques »...

1 Révisions de L2

Dans le module HLMA412, vous avez vu :

1. Une étude de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :
   a) rappel des propriétés de $\mathbb{R}$, en particulier de la différence fondamentale entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ (propriété de la borne supérieure) ;
   b) quelques éléments d'étude des suites de nombres réels : suite extraite, valeur d'adhérence, $\limsup$ et $\liminf$, suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$;
   c) introduction à la topologie de $\mathbb{R}$: voisinage d'un nombre réel, partie ouverte, intérieur d'une partie, partie fermée, adhérence d'une partie, compacité (définition de Bolzano-Weierstrass).
2. La généralisation à $\mathbb{R}^n$ des notions topologiques vues dans $\mathbb{R}$, en utilisant la norme euclidienne : boules ouvertes, boules fermées, voisinages, ouverts, fermés, compacts, caractérisation séquentielle de ces notions.
3. La généralisation de la notion de continuité aux applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: définition avec « ε et δ », caractérisation séquentielle, opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composée), expression de la continuité en termes d'ouverts et de fermés, continuité et compacité, continuité uniforme.

Le but de ce chapitre est de vous faire réviser assez rapidement ces notions (surtout 1 et 2) que nous allons retrouver (avec d'autres) dans tout le cours de Topologie.

1.1 Suites réelles et topologie de $\mathbb{R}$

1.1.1 Suites réelles, complétude de $\mathbb{R}$

Propriété de la borne supérieure Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, que $\mathbb{Q}$ ne possède pas, c'est la **propriété de la borne supérieure** : toute partie A de $\mathbb{R}$ qui est non-vide et majorée admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure notée $\sup(A)$. On rappelle que la borne supérieure de A est par définition le plus petit des majorants de A, s'il existe.

⚠ Lorsque $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas majorée, on pose $\sup(A) := +\infty$.

Exemple. Considérons $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 < 2\}$, autrement dit $A =]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$. Clairement A n'est pas vide, clairement A est majorée, et elle admet bien dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure qui est $\sqrt{2}$. Rappelons que la borne sup d'une partie A n'a pas de raison d'appartenir à A, et ici ce n'est pas le cas.

Exemple. Mais considérons à présent $B := \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 < 2\}$ dans $\mathbb{Q}$. C'est également une partie non-vide et majorée, mais cette fois elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: tout majorant M de B dans $\mathbb{Q}$ sera (vu dans $\mathbb{R}$) strictement supérieur à $\sqrt{2}$ (qui n'est pas rationnel, comme vous le savez), et il existera alors un autre rationnel M' majorant B et strictement plus petit que M (prendre n'importe quel rationnel M' tel que $\sqrt{2} < M' < M$), donc il n'existe pas de plus petit majorant de B dans $\mathbb{Q}$, autrement dit B n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Voici une application simple mais importante de la propriété de la borne supérieure :

Théorème. *Toute suite réelle croissante majorée est convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. On pose $\ell := \sup\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. On montre que x_n converge vers ℓ. □

On accepte d'écrire $\lim_{n\to\infty} u_n := +\infty$ lorsque la suite diverge vers $+\infty$, mais il faut bien garder à l'esprit que ce « $+\infty$ » n'est pas un nombre réel. De même avec $-\infty$.

Valeurs d'adhérence d'une suite Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une **extractrice** est une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante : on sélectionne des nombres entiers $\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < \cdots$ Une **suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où ϕ est une extractrice. Une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un réel ℓ tel que $u_{\phi(n)} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ pour une certaine extractrice (jamais unique).

Si une suite converge, alors elle possède une unique valeur d'adhérence : sa limite. Mais une suite peut ne pas converger et posséder une ou plusieurs valeurs d'adhérence.

Limite sup et limite inf d'une suite Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons l'ensemble A_n des valeurs de la suite au-delà du rang n, c'est à dire $A_n := \{u_k\,;\, k \geqslant n\}$. Clairement chaque A_n est non vide et majoré, donc on peut s'intéresser à $a_n := \sup(A_n)$. Comme $A_{n+1} \subseteq A_n$, on a $a_{n+1} \leqslant a_n$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée car (u_n) est supposée bornée. Elle possède ainsi une limite finie $\lim_{n\to\infty} a_n$. Cette limite est la **limite sup** de la suite $(u_n)_{n\in N}$:

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k\,;\, k \geqslant n\} \in \mathbb{R}$$

De même, on définit la **limite inf** d'une suite minorée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k\,;\, k \geqslant n\} \in \mathbb{R}$$

Quelques propriétés importantes :

1. On a toujours $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$, et dans ce cas $\lim u_n = \liminf u_n = \limsup u_n$.
3. $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
4. $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).

Suites de Cauchy, complétude Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\,;\, \forall n, p \geqslant N, |u_n - u_p| < \varepsilon$$

On voit facilement ( ) que toute suite convergente est de Cauchy. Le résultat suivant, fondamental, dit que c'est réciproque : c'est ce que l'on appelle la **complétude** de $\mathbb{R}$.

Théorème. *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.*

On pense bien « convergente dans $\mathbb{R}$ », c'est-à-dire qu'on exclut la « convergence » vers $\pm\infty$.

Remarque. Par contraste, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

1.1.2 Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}$

L'idée est de comprendre comment une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ se comporte par rapport à un point $x \in \mathbb{R}$, au-delà de la dichotomie ensembliste « $x \in A$ » / « $x \notin A$ ». Par exemple : il se peut que x appartienne à A, mais est-ce que A « entoure » complètement x ? Ou encore : il se peut que x n'appartienne pas à A, mais est-ce que A « s'approche infiniment près » de x ? Prenons par exemple $A = [0, 1[$. Le point 1 n'appartient pas à A, mais il est « collé à A ». En revanche, le point 2 est « loin de A », de même d'ailleurs que le point $1,00001$. Le point 0 appartient à A mais il n'est pas « entouré par A », à la différence du point $1/2$ par exemple.

Voisinage d'un point, partie ouverte, intérieur d'une partie Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est un **voisinage** d'un point $x \in \mathbb{R}$ si « A entoure complètement x dans $\mathbb{R}$ », c'est à dire précisément s'il existe un $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subseteq A$. Bien noter que s'il existe un tel $r > 0$, alors tout autre $r' \in]0, r[$ convient également.

Exemple. $[0, 1[$ est un voisinage de $1/2$ mais pas de 0.

Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **ouverte** si elle est voisinage de tous ses points, c'est à dire si :

$$\forall a \in A, \exists r > 0\,;\,]a - r, a + r[\subseteq A$$

Bien noter que r dépend généralement de a !

Exemple. Tout intervalle ouvert est une partie ouverte. L'ensemble vide, n'ayant pas de points, est ouvert !

On montre facilement que :

1. $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts
2. une réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte ;
3. une intersection *finie* de parties ouvertes est ouverte.

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est une partie quelconque, l'**intérieur** de A est l'ensemble, noté $\mathring{A}$ ou $\mathrm{int}(A)$, de tous les points dont A est voisinage. De manière équivalente ( ), $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans A.

Exemple. L'intérieur de $[0, 1[$ est $]0, 1[$.

Parties fermées, adhérence d'une partie Par définition, une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **fermée** si son complémentaire $\mathbb{R} \backslash A$ est ouvert. Par passage au complémentaire des propriétés des ouverts, on voit que :

— $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont fermés ;
— une intersection quelconque de fermés est fermée ;
— une réunion *finie* de fermés est fermée.

Exemple. $[0, 1]$ est fermé.

Cette définition n'est pas très intuitive, aussi il est intéressant d'avoir une caractérisation directe de « être une partie fermée ». Le cours de HLMA412 présentait d'abord une caractérisation séquentielle (en termes de suites), mais on va commencer par quelque chose de plus général :

— Un point $x \in \mathbb{R}$ est **adhérent** à $A \subseteq \mathbb{R}$ s'il est « infiniment proche de A », c'est à dire si tout intervalle ouvert centré en x rencontre A :

$$\forall r > 0,]x - r, x + r[\cap A \neq \varnothing$$

Naturellement, tous les points qui appartiennent à A sont adhérents à A. Mais il peut y en avoir d'autres : par exemple 1 est adhérent à $[0, 1[$.

— L'**adhérence** de A, notée $\mathrm{adh}(A)$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui sont adhérents à A. Comme on vient de le voir, on a toujours $A \subseteq \overline{A}$ mais parfois l'inclusion est stricte.
— Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **fermée** si et seulement si $A = \overline{A}$.
— L'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence Un point $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

1.1.3 Compacité

Le cours de HLMA412 a introduit la formulation de Bolzano-Weiertrass de la compacité, en termes de suites.

Définition. Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **compacte** si toute suite de points de A possède une sous-suite qui converge vers un point de A.

Théorème. *Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Exemple. $[0, 1]$ et $\{0\} \cup \{1/n\,; n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des parties compactes.

1.2 Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}^n$

L'idée est de généraliser à $\mathbb{R}^n$ ce que l'on a fait dans $\mathbb{R}$ dans la section précédente. Mais comment ? Qu'a-t-on utilisé pour définir les notions de limite et valeur d'adhérence de suites, suites de Cauchy, parties ouvertes et fermées, parties compactes, etc ? La plupart du temps, uniquement le fait de pouvoir considérer la quantité $|a - b|$ associée à deux points $a, b \in \mathbb{R}$, aussi appelée **distance** entre a et b :

- Dire que $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$, c'est dire que la distance $|u_k - \ell|$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
- Toutes les notions de parties ouvertes, fermées, etc ont utilisé la notion d'intervalle de manière fondamentale. Or l'intervalle $]x-r, x+r[$ est l'ensemble des points dont la distance à x est strictement inférieure à r.

Si on pouvait utiliser une notion de distance dans $\mathbb{R}^n$, on pourrait alors recopier quasiment mot pour mot ce que l'on a fait dans $\mathbb{R}$ pour le généraliser à $\mathbb{R}^n$ (dont $\mathbb{R}$ est bien sûr un cas particulier : $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$).

Remarque. « Quasiment » est une précaution importante : à certains endroits, on a utilisé des spécificités de $\mathbb{R}$ qui ne seront plus présentes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$... notamment la *relation d'ordre*, qui est naturelle sur $\mathbb{R}$ et qui n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ lorsque $n \geqslant 2$. Il sera par exemple facile de parler des valeurs d'adhérence d'une suite (u_k) mais il n'y aura plus de sens à parler de plus grande ou plus petite valeur d'adhérence... donc pas de moyen de parler de $\liminf$ et $\limsup$!

Existe-t-il une notion de distance dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,... $\mathbb{R}^n$? Oui, vous connaissez la distance euclidienne qui provient de la norme euclidienne (de même que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ provient de la valeur absolue). On rappelle que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **norme euclidienne** de x est :

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Et la distance euclidienne entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$d_2(x, y) := \|x - y\|_2$$

Pour simplifier l'écriture, nous allons écrire d au lieu de d_2 dans la suite du chapitre.

⚠ Pour $n = 1$, la norme euclidienne est simplement la valeur absolue.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et r un nombre réel positif ou nul. La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x, a) < r\}$$

et la boule fermée, ou disque, de centre a et de rayon r est :

$$D(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x, a) \leqslant r\}$$

Voisinages, parties ouvertes, intérieur On généralise à « $\mathbb{R}^n$ euclidien » les définitions vues dans $\mathbb{R}$. Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que :

- A est un **voisinage** du point $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.
- A est ouvert(e) si A est voisinage de tous ses points, c'est à dire si $\forall a \in A, \exists r > 0\,;\, B(a, r) \subseteq A$
- L'intérieur de A est l'ensemble $\mathring{A}$ des points dont A est voisinage, autrement dit $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A\}$.

Exemple 1. 🔧 Les boules ouvertes sont ouvertes !

On démontre de même que : 🔧

— $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts.
— Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, une intersection finie d'ouverts est ouverte.
— $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A.

Parties fermées, adhérence Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on dit que :
— Le point $a \in \mathbb{R}^n$ est **adhérent** à A si $A \cap B(a,r) \neq \varnothing$ quel que soit $r > 0$.
— L'adhérence de A est l'ensemble $\overline{A}$ des points adhérents à A.
— A est fermé(e) si $A = \overline{A}$

Exemple 2. Les boules fermées sont fermées !

On démontre que :
— A est ouverte si et seulement si $\mathbb{R}^n \backslash A$ est fermée.
— $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermés.
— Une intersection quelconque de fermés est fermée, une réunion finie de fermés est fermée.
— $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Convergence des suites Soit (x_k) une suite de points de $\mathbb{R}^n$. On dit que (x_k) **converge** vers le point $a \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K, \|x_k - a\| < \varepsilon \tag{1.1}$$

La condition $\|x_k - a\| < \varepsilon$ s'écrit aussi $x_k \in B(a, \varepsilon)$. Donc (1.1) revient à dire que la suite entre définitivement dans toute boule ouverte centrée en a. On voit facilement que l'on peut remplacer « boule ouverte centrée en a » par « voisinage de a » : la suite (x_k) converge vers a si et seulement si, pour tout voisinage A de a, il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \in A$ pour tout $k \geqslant K$.

Comme dans $\mathbb{R}$, les notions « point adhérent » et « partie fermée » ont une caractérisation séquentielle : si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, alors :
— x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite (a_k) de points de A qui converge vers x
— A est fermée si et seulement la limite de toute suite convergente de points de A appartient à A.

Suites de Cauchy, complétude Une suite (x_k) de points de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \,;\, \forall k, k' \geqslant K, d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon$$

Théorème. $\mathbb{R}^n$ *est complet : toute suite de Cauchy est convergente.*

Parties compactes ⚠ Le cours HLMA412 vous a donné la définition d'une partie compacte A de $\mathbb{R}^n$: « A est compacte si A est fermée et bornée ». Le problème est que ce n'est pas une très bonne définition, au sens où elle ne va pas se généraliser telle quelle aux espaces topologiques généraux ni même aux espaces métriques. Il vaut mieux voir cet énoncé comme un *théorème*, propre à $\mathbb{R}^n$ et plus généralement aux espaces vectoriels normés de dimension finie. En revanche, ce qui était un théorème pour HLMA412 peut devenir une définition acceptable :

Définition 3. Une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est **compacte** si toute suite de points de A admet une valeur d'adhérence qui appartient à A, autrement dit si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A il existe un point $a \in A$ et une extractrice ϕ tels que $a_{\phi(n)} \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

Théorème. *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

1.3 Fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Voir les chapitres suivants...

2 Espaces métriques

Qu'est-ce qu'une suite convergente ? Vous connaissez déjà la notion de convergence pour les suites de nombres réels : si $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ est une suite réelle, on dit qu'elle converge vers le nombre réel ℓ, qui est alors appelé la limite de la suite, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geqslant N, |x_n - \ell| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Dans cette expression, le terme « $|x_n - \ell|$ » s'interprète comme la *distance* entre les nombres x_n et ℓ. L'idée est que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si la distance entre x_n et ℓ devient arbitrairement petit si n est suffisamment grand, en un sens précis donné par (2.1).

Qu'est-ce qu'une fonction continue ? De même, vous connaissez déjà la notion de continuité pour les fonctions de variable réelle et à valeurs réelles. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Dans cette expression, les termes « $|x - a|$ » et « $|f(x) - f(a)|$ » s'interprètent respectivement comme la distance entre x et a et la distance entre $f(x)$ et $f(a)$. L'idée est que f est continue en a si la distance entre $f(x)$ et $f(a)$ devient arbitrairement petite si la distance entre x et a est suffisamment petite, en un sens précis donné par (2.2).

2.1 Distance

Définition. Une **distance** sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant, quels que soient $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

On dit que $d(x, y)$ est la **distance** entre $x$et y.

La condition 3 de la définition est appelée **inégalité triangulaire**.

Définition. Un **espace métrique** (X, d) est un ensemble X muni d'une distance d.

Exercice. Montrer qu'une distance vérifie la « deuxième inégalité triangulaire » :

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leqslant d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

Exemples

Pour chacun des exemples suivants, il faut savoir montrer que les distances sont bien des distances...

1. Tout ensemble X peut être muni de la **distance discrète**, définie par :

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

   Cette distance n'est pas très utile en pratique, mais elle est intéressante pour tester les concepts et l'intuition.

2. L'espace métrique « $\mathbb{R}$ usuel » est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) := |x-y|$, définie à l'aide de la valeur absolue.
3. De même, l'espace métrique « $\mathbb{C}$ usuel » est l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z,w) := |z-w|$, définie à l'aide du module.
4. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ peut être muni de plusieurs distances classiques, en particulier d_∞, d_1 et d_2. En notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit :
   a) $d_\infty(x,y) := \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$.
   b) $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$.
   c) $d_2(x,y) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$ (**distance euclidienne**)
5. Si A est un ensemble quelconque, on considère l'ensemble $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions de A dans $\mathbb{R}$ qui sont *bornées*. On définit sur $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$ la **distance de la convergence uniforme** par :

$$d_\infty(f,g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

6. Sur l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[a,b]$, on peut définir, en plus de la distance précédente[1] :

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt}$$

Distance associée à une norme

A l'exception de la distance discrète, les distances qui précèdent proviennent d'une *norme* sur un espace vectoriel. On rappelle que, sur un espace vectoriel E réel (ou complexe), une **norme** est une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$ pour un espace vectoriel complexe) :

1. On rappelle, et on reverra plus loin, qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

1. $N(u) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0_E$;
2. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;
3. $N(u + v) \leqslant N(u) + N(v)$.

Proposition. *Soit N une norme sur l'espace vectoriel E. Alors $d(x, y) := N(x - y)$ définit une distance sur E.*

Démonstration. Vérification directe de la définition de « distance » à partir des propriétés d'une norme. □

Exercice. Définir les normes qui donnent les distances des exemples 2-6.

Certaines normes sont issues d'un produit scalaire. On rappelle qu'un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel est une *forme bilinéaire* $h : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant, quels que soient $x, y \in E$:

1. $h(x, y) = h(y, x)$;
2. $h(x, x) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0_E$.

On montre qu'un produit scalaire vérifie **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** $|h(x, y)| \leqslant \sqrt{h(x, x)}\sqrt{h(y, y)}$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires, ainsi que **l'inégalité de Minkowski** $\sqrt{h(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{h(x, x)} + \sqrt{h(y, y)}$. On en déduit que $N(x) := \sqrt{h(x, x)}$ définit une norme sur E, et donc une distance.

Exercice. Quels sont les normes de l'exercice précédent qui proviennent d'un produit scalaire ?

Sous-espace métrique : distance induite sur une partie

On considère un espace métrique (X, d) et une partie $A \subseteq X$. On voit immédiatement que la fonction $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x, y) := d(x, y)$ est une distance sur A.

Définition. On dit que d_A est la distance sur A **induite** par la distance d sur X. On dit que (A, d_A) est un **sous-espace métrique** de (X, d).

Cette manière de former un sous-espace d'un espace métrique donné permet d'obtenir une grande variété de nouveaux espaces métriques qui, comme on le verra, peuvent avoir des propriétés très différentes de l'espace dans lequel ils « habitent ». Par exemple, le segment $[0, 1]$ hérite de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et devient un espace métrique, de même que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.

Exercice. On munit le cercle unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par la distance euclidienne. Quelle est la distance, dans S^1, entre les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$? Et si on prend la distance induite par d_∞ ? La distance induite par d_1 ?

Produit d'espaces métriques

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, plusieurs distances utiles peuvent être définies sur le produit $X \times Y$, notamment :

$$\begin{aligned} d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) &:= \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')) \\ d_1\big((x,y),(x',y')\big) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ d_2\big((x,y),(x',y')\big) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2} \end{aligned}$$

On verra plus loin que ces distances sont « équivalentes » en un certain sens. Plus généralement, on définit de même des distances sur tout produit fini $X_1 \times \cdots \times X_n$ d'espaces métriques ; on remarque notamment que l'on retrouve les trois distances usuelles sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ en partant de $\mathbb{R}$ usuel.

d_∞ est bien une distance

1. On a clairement $d_\infty((x,y),(x',y')) \geqslant 0$. L'égalité si et seulement si $d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0$ donc si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$ car d_X et d_Y sont des distances, donc si et seulement si $(x,y) = (x',y')$.
2. La symétrie de d_∞ provient de la symétrie de d_X et d_Y :

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'),(y,y')) = \max(d_X(x',x), d_Y(y'y)) = d_\infty((x',y'), d_Y(x,y))$$

3. Pour l'inégalité triangulaire, on se donne (x,y), (x',y') et (x'',y'') dans $X \times Y$. Alors $d_X(x,x'') \leqslant d_X(x,x') + d_X(x',x'') \leqslant d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$; la première inégalité est l'inégalité triangulaire de d_X, la deuxième inégalité vient de la définition de d_∞ comme maximum. De même, on montre que $d_Y(y,y'') \leqslant d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$. On en déduit que $d_\infty((x,y),(x'',y'')) = \max(d_X(x,x''), d_Y(y,y'')) \leqslant d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$.

d_1 est bien une distance

1. Similaire au cas d_∞.
2. Idem.
3. Inégalité triangulaire avec les mêmes notations que pour d_∞ : on a

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x'',y'')) &= d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') \\ &\leqslant d_X(x,x') + d_X(x',x'') + d_Y(y,y') + d_Y(y',y'') \\ &= d_1((x,y),(x',y')) + d_1((x',y'),(x'',y'')) \end{aligned}$$

d_2 est bien une distance

1. Similaire au cas d_∞.
2. Idem.
3. Inégalité triangulaire :

Distance à une partie

Soit (X, d) un espace métrique. Considérons une partie $A \subseteq X$ et un point $x \in X$. On définit la **distance** de xà A par :

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \ ; a \in A\}$$

⚠ Cet « inf » n'est pas nécessairement réalisé. En particulier, il se peut que la distance de x à A soit nulle sans pour autant que x appartienne à A.

Exercice. Dans $\mathbb{R}$ usuel, déterminer $d(2, [0, 1])$, $d(2, [0, 1[)$, $d(0,]0, 1])$, $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$.

2.2 Boules

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Soient $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- La **boule ouverte** de centre a et rayon r est $B(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$.
- La **boule fermée** de centre a et rayon r est $D(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leqslant r\}$.
- La **sphère** de centre a et rayon r est $S(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$.

⚠ Il existe d'autres notations pour désigner les boules fermées : $B_f(a, r)$, $B'(a, r)$, $\overline{B}(a, r)$...

Remarque. ✎ Pour un rayon nul : $B(a, 0) = \varnothing$ et $D(a, r) = S(a, r) = \{a\}$.

Exemple. ✎ Boules des espaces métriques de référence (voir plus haut) :
- $\mathbb{R}$ usuel,
- $\mathbb{R}^n$ muni des distances d_∞, d_1 et d_2,
- X espace métrique discret,
- $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme,
- $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni des distances d_∞, d_1 et d_2.

Boules d'un sous-espace métrique

✎ Soit $A \subseteq X$, muni de la distance induite d_A . Pour $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a une relation simple entre la boule $B_X(a, r)$ de centre a et rayon r vue dans X et la boule $B_A(a, r)$ de même centre et même rayon vue dans A :

$$B_A(a, r) = A \cap B_X(a, r).$$

✎ De même, on a $D_A(a, r) = A \cap D_X(a, r)$ et $S_A(a, r) = A \cap S_X(a, r)$.

Séparation des points

Dans un espace métrique, les boules « séparent les points » au sens suivant :

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique, et soient a, b deux points distincts de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap B(b, r) = \varnothing$.*

Démonstration. Comme a et b sont distincts, on a $d(a, b) > 0$. Posons $r := d(a, b)/2$ qui est donc strictement positif. On montre que $B(a, r)$ et $B(b, r)$ sont disjointes en raisonnant par l'absurde : s'il existait un $x \in B(a, r) \cap B(b, r)$, on aurait $d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b) < r + r = 2r = d(a, b)$ d'où $d(a, b) < d(a, b)$ qui est une contradiction. Donc $B(a, r) \cap B(b, r) = \varnothing$ comme voulu. □

Parties bornées, diamètre

Définition. Le diamètre $\operatorname{diam}(A)$ d'une partie $A \subseteq X$ est le nombre (éventuellement $+\infty$) défini par :

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

On dit que A est **bornée** si son diamètre est fini, c'est-à-dire s'il existe un réel $M > 0$ tel que $d(x, y) \leqslant M$ quels que soient $x, y \in A$.

Exemple. Dans un espace métrique quelconque, les boules ouvertes sont bornées. En effet, si $x, y \in B(a, r)$ alors $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$, donc $B(a, r)$ est bornée et $\operatorname{diam}(B(a, r)) \leqslant 2r$. De même pour les boules fermées.

Exemple. Dans un espace métrique discret à plus de deux éléments :

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Proposition. *Une partie $A \subseteq X$ est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule, c'est-à-dire s'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(x, r)$.*

Démonstration. Par double implication.

1. Sens $\Rightarrow$. Si A est bornée et si $a \in A$ (on peut supposer A non vide...), alors $A \subseteq B(a, \operatorname{diam}(A))$.
2. Sens $\Leftarrow$. Si $A \subseteq B(a, r)$ alors $\operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(B(a, r))$, donc $\operatorname{diam}(A) \leqslant 2r$ et A est bornée.

□

2.3 Convergence des suites, continuité des applications

On se place dans un espace métrique (X, d). On considère des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X.

Définition. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $a \in X$ dans (X, d) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, x_n \in B(a, \varepsilon).$$

Proposition. *Une suite convergente dans (X, d) n'a qu'une seule limite.*

Démonstration. Utiliser le fait que les boules séparent les points. □

Cette unicité n'a pas toujours lieu dans un espace topologique général (voir chapitre suivant).

Exemple. Suites convergente d'un espace métrique discret. Suites convergentes dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ pour la distance de la convergence uniforme.

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** au point $a \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid f\big(B_X(a, \delta)\big) \subseteq B_Y\big(f(a), \varepsilon\big).$$

On dit que f est **continue** si elle est continue en tout point de X.

Exemple. Les fonctions constantes sont continues en tout point. La fonction identité id_X est continue en tout point.

Cas particuliers d'applications continues

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que :

— f est **k-lipschitzienne** (pour un certain réel $k \geqslant 0$) si

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leqslant k d_X(x, x')$$

f est **lipschitzienne** si elle est k-lipschitzienne pour un certain k.

— f est **contractante** (ou encore est une **contraction**) si elle est k-lischitzienne avec $0 \leqslant k < 1$.

— f **préserve la distance** si

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

— f est une **isométrie** si elle est bijective et préserve la distance.

Il est clair qu'une application qui préserve la distance est 1-lipschitzienne. Une bijection f est une isométrie si et seulement si f et f^{-1} sont 1-lipschitziennes.

Proposition. *Toute application lipschitzienne est continue.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ k-lipschitzienne, et soit $a \in X$. Montrons que f est continue en a. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\delta := \varepsilon/k$, on obtient :

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < k\delta = \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

comme voulu. □

Exemple. Distance à un point fixé, à une partie.

Beaucoup d'applications continues ne sont pas lipschitziennes. Par exemple $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.4 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Une distance est un outil quantitatif (la distance entre deux points est un nombre, une mesure de l'éloignement) qui nous permet de définir les notions de « convergence d'une suite » et de « continuité d'une application ». Comme on l'a vu, changer de distance modifie en général ces notions de convergence et de continuité. Par exemple, une suite qui converge pour une certaine distance peut ne pas converger pour une distance différente, ou peut converger vers une autre limite. Mais, pour une distance donnée, à quel point les notions de convergence et continuité qui lui sont attachées dépendent-elles de *cette distance* particulière ? D'autres distances pourraient-elles donner les mêmes notions de convergence et continuité ? Peut-on exprimer ces notions sans faire référence à une distance particulière ?

Les ouverts d'un espace métrique (X, d) sont des parties de X qui, en un certain sens, généralisent les boules ouvertes :

- toute boule ouverte de X est un ouvert de X, mais il y a beaucoup plus d'ouverts que de boules ouvertes ;
- la convergence des suite et la continuité des applications peuvent être définies à l'aide des ouverts ;
- des distances différentes peuvent posséder les mêmes ouverts, et donc donner les mêmes notions de convergence et continuité.

2.4.1 Ouverts

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Une partie $U \subseteq X$ est **ouverte** (on dit aussi que U est un **ouvert** de X) si tout point de U est le centre d'une boule ouverte contenue dans U :

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subseteq U.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel : les intervalles ouverts sont ouverts, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas ouvert. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, le « demi-plan ouvert » $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est ouvert. Dans un espace discret, toute partie est ouverte.

Proposition. *Les boules ouvertes de (X, d) sont ouvertes.*

Démonstration. Soit $a \in X$ et soit $r > 0$. Pour montrer que $B(a, r)$ est ouverte, on revient à la définition : on considère un $x \in B(a, r)$ quelconque, et on construit, à l'aide du fait que $d(x, a) > r$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$. □

Proposition. *Tout ouvert non vide de (X, d) est réunion de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit U un tel ouvert. Pour chaque $x \in U$, choisir un nombre $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq U$. Alors $U = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x)$. □

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble de ses ouverts possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\varnothing$ sont ouverts.*
2. *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors la réunion $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.*
3. *Si $U_1, \dots, U_n$ est une famille finie d'ouverts, alors l'intersection $U_1 \cap \dots \cap U_n$ est un ouvert.*

⚠ Pour se convaincre de l'importance de l'hypothèse « famille finie », considérer la famille des intervalles $]-1+1/n, 1-1/n[$ dans $\mathbb{R}$ usuel.

Démonstration. Vérification directe, ensembliste, à partir de la définition de « ouvert ». □

Théorème. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ usuel est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Pour chaque $x \in U$, on note $]m_x, M_x[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans U. ⚠ Il faut *prouver* qu'un tel intervalle existe et est unique ! Pour cela, démontrer que c'est la réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans U : on montre que cette réunion est un intervalle, qu'elle est ouverte, qu'elle contient x, etc. On voit ensuite facilement que les intervalles $]m_x, M_x[$ sont soit égaux soit disjoints deux à deux. On peut alors choisir une famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres $x_i \in U$ telle que les intervalles $]m_i, M_i[$ soient deux à deux disjoints. On montre que l'ensemble d'indices I est fini ou dénombrable, en montrant qu'il s'injecte dans $\mathbb{Q}$: il suffit pour cela de choisir un rationnel r_i dans $]m_i, M_i[$. □

2.4.2 Fermés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Une partie $F \subseteq X$ est **fermée** (on dit aussi que c'est un **fermé** de X) si $X\backslash F$ est ouverte.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel, l'intervalle $[0, 1]$ est fermé, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas fermé. Dans un espace discret, toute partie est fermée.

Proposition. *Les boules fermées et les sphères de (X, d) sont fermées.*

Démonstration. Soit $a \in X$ et $r > 0$.

— On montre que $D(a, r)$ est fermé en montrant que $X\backslash D(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ est ouvert. Pour cela, soit $x \in X$ tel que $d(a, x) > r$. On montre alors que $B(x, d(a, x) - r) \subseteq X\backslash D(a, r)$ en utilisant l'inégalité triangulaire.

— On montre que $S(a, r)$ est fermée en observant que son complémentaire est la réunion de deux ouverts.

□

Proposition. *Soit (X,d) un espace métrique. L'ensemble de ses fermés possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\varnothing$ sont fermés.*
2. *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.*
3. *Si $F_1, \ldots, F_n$ est une famille finie de fermés, alors la réunion $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ est un fermé.*

Pour se convaincre de l'importance de l'hypothèse « famille finie », considérer la famille des intervalles $[-1+1/n, 1-1/n]$ dans $\mathbb{R}$ usuel.

Démonstration. Par passage au complémentaire et application du résultat correspondant sur les ouverts (voir plus haut), en se servant des égalités ensemblistes $X \backslash (\bigcup_i A_i) = \bigcap_i (X \backslash A_i)$ et $X \backslash (\bigcap_i A_i) = \bigcup_i (X \backslash A_i)$. □

Exemple. Un cas particulier important : dans un espace métrique, les singletons sont fermés (ce sont des boules fermées...), et par conséquent toute partie finie est fermée.

2.4.3 Convergence et continuité en termes d'ouverts

Proposition. *Soit (X,d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert contenant a, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$.*

Autrement dit, on peut remplacer « toute boule ouverte centrée en a » par « tout ouvert contenant a » dans la définition de la convergence d'une suite vers $a \in X$.

Démonstration. Par double implication.

- Pour le sens $\Leftarrow$: les boules sont des ouverts particuliers.
- Pour le sens $\Rightarrow$, soit U un ouvert contenant x. Il existe donc un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq U$, d'où un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a,r)$ pour tout $n \geqslant N$, et donc $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$.

□

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$.*

Autrement dit, on peut remplacer « toute boule ouverte centrée en $f(a)$ » par « tout ouvert contenant $f(a)$ » et « il existe une boule ouverte centrée en a » par « il existe un ouvert contenant a » dans la définition de la continuité d'une application en $a \in X$.

Démonstration. Par double implication.

— Pour le sens $\Leftarrow$, soit $\varepsilon > 0$. Alors $B_Y(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de Y, il existe donc un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Soit $\delta > 0$ tel que $B_X(a, \delta) \subseteq U$. Alors $f(B_X(a, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Donc f est continue en a.

— Pour le sens $\Rightarrow$, soit V un ouvert de Y tel que $f(a) \in V$. D'où un $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subseteq V$, puis un $\delta > 0$ tel que $f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. On a bien trouvé un ouvert Ude X contenant a, à savoir $U := B_X(a, \delta)$, tel que $f(U) \subseteq V$.

□

2.5 Distances équivalentes

Puisque la convergence des suites et la continuité des applications peuvent s'exprimer en référence aux ouverts exclusivement, on se demande si des distances différentes peuvent avoir les mêmes ouverts. C'est effectivement le cas, parfois avec des distances très différentes l'une de l'autre.

Définition. Soit X un ensemble, et soient d_1, d_2 deux distances sur X.

— On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent les mêmes ouverts.

— On dit que d_1 et d_2 sont **fortement équivalentes**, ou **équivalentes** tout court, s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y). \tag{2.3}$$

⚠ Terminologie pas stabilisée.

Note. Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u).$$

Les distances associées à des normes équivalentes sont donc (fortement) équivalentes.

Proposition. *Si d_1 et d_2 sont fortement équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration. On suppose qu'il existe des constantes α et β vérifiant (2.3). Il s'agit de montrer que tout d_1-ouvert est aussi un d_2-ouvert, et réciproquement.

— Soit $U \subseteq X$ un d_1-ouvert non vide (s'il est vide, c'est évidemment aussi un d_2-ouvert). Soit $a \in U$. On écrit qu'il existe une petite d_1-boule centrée en a et contenue dans U. A l'aide de l'une des inégalités de « fortement équivalentes », on en déduit qu'il existe une petite d_2-boule centrée en a et contenue dans U. Donc U est bien un d_2-ouvert.

— Réciproquement, par le même type de raisonnement et à l'aide de l'autre inégalité de (2.3), on montre qu'un d_2-ouvert (que l'on peut supposer non vide) est aussi forcément un d_1-ouvert.

□

Exemple.

— Les trois distances usuelles d_∞, d_1, d_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont fortement équivalentes (elles proviennent de normes équivalentes). On vérifie facilement que $d_\infty \leqslant d_2 \leqslant d_1 \leqslant n d_\infty$ (le voir directement sur les normes).

— Les trois distances usuelles sur le produit de deux espaces métriques (voir plus haut) sont fortement équivalentes : on a $d_\infty \leqslant d_2 \leqslant d_1 \leqslant 2d_\infty$.

— Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, les distances d_∞ et d_1 ne sont pas topologiquement équivalentes : on montre par exemple que la d_∞-boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte pour d_1. Voir feuille TD1.

— ⚠ Toute distance d sur X est topologiquement équivalente à une distance *bornée*. Par exemple, $\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ définit une distance sur X, topologiquement équivalente à d. Voir feuille TD1.

3 Espaces topologiques

Ce que nous avons vu dans le chapitre précédent :

— la notion de distance permet de définir la convergence des suites et la continuité des applications, en généralisant ce que l'on connaît déjà pour les suites réelles et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

— le vocabulaire des boules ouvertes permet de reformuler ces définitions de manière ensembliste ;

— on peut à nouveau reformuler ces définitions en utilisant les ouverts de l'espace métrique, qui généralisent les boules ouvertes ;

— des distances différentes peuvent posséder les mêmes ouverts.

L'étape suivante est de considérer que les ouverts sont, dans de nombreux cas, plus importants que la distance. Dans la définition d'un *espace topologique*, on oublie la distance (parfois il n'y en aura pas) et on ne garde que les ouverts. On arrive à une situation plus abstraite, car plus qualitative : les ouverts sont des parties de l'espace topologique dans lequel on se situe, les définitions seront donc purement ensemblistes et il n'y aura pas d'outil tel que la distance pour « mesurer » l'éloignement entre les points.

Quel bénéfice en tirer ?

— Certains espaces toplogiques ne sont pas métrisables : il n'existe pas de distance qui définisse les ouverts. La « topologie générale » est donc plus générale que la « topologie des espaces métriques ».

— Certains espace topologiques sont bien métrisables, mais aucune distance naturelle ne s'impose pour parler de leurs ouverts.

— Dans de nombreuses situations, ne raisonner que sur les ouverts permet une meilleure compréhension (meilleure = plus simple, plus générale).

— Néanmoins, lorsque l'espace de travail est un espace métrique, il y a aussi ded cas où l'utilisation de la distance est plus intuitif et plus simple.

3.1 Topologie sur un ensemble

Définition. Soit X un ensemble. Une **topologie** sur X est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X, appelées **ouverts** de la topologie, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\varnothing$ et X appartiennent à $\mathcal{O}$.
2. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathcal{O}$.
3. Si $U_1, \dots, U_n$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ appartient à $\mathcal{O}$.

Un **espace topologique** $(X, \mathcal{O})$ est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{O}$.

⚠ Bien noter la différence entre « réunion quelconque » et « intersection finie ».

Exemple.

— Une distance d sur X définit une topologie sur X (voir chapitre précédent).

— La **topologie grossière** sur X est $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie sur X qui contient le moins d'ouverts possible.

— La **topologie discrète** sur X est $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$. C'est la topologie sur X qui contient le plus d'ouverts possible. On a vu (chapitre précédent) que c'est la topologie de la distance discrète.

— L'**espace de Sierpinski** est donné par $X = \{a, b\}$ et $\mathcal{O} = \{\{a, b\}, \{a\}, \emptyset\}$.

⚠ Dans la suite du cours, on s'intéresse principalement aux espaces métriques. Une notion ou une propriété peut être de nature *topologique*, au sens où elle ne dépend que des ouverts et non de la distance, ou bien de nature *métrique* au sens où elle dépend fondamentalement de la distance.

Fermés d'un espace topologique

Se donner les ouverts pour définir une topologie revient à se donner leurs complémentaires : les fermés.

Définition. Soit $(\mathcal{O}, X)$ un espace topologique. Une partie $F \subseteq X$ est **fermée** (pour la topologie) si $X \backslash F$ est un ouvert.

Exemple. $[0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$ mais $[0, 1[$ ne l'est pas. Dans un espace discret, toutes les parties sont fermées.

Proposition. *L'ensemble des fermés d'un espace topologique vérifie :*

1. *$\emptyset$ et X sont fermés*
2. *une intersection quelconque de fermés est fermée.*
3. *Une réunion finie de fermés est fermée.*

Démonstration. Par passage au complémentaire des propriétés analogues des ouverts. □

Espaces métrisables. Espaces séparés

On dit qu'un espace topologique est **métrisable** s'il existe une distance qui induise la topologie donnée. Est-ce que tout espace topologique est métrisable ? Non, car les espaces métrisables ont des propriétés particulières : par exemple ils sont séparés.

Définition. Un espace topologique est **séparé** si quels que soient $a, b \in X$ distincts, il existe un ouvert U contenant a et un ouvert V contenant b tels que $U \cap V = \emptyset$.

Proposition. *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration. Déjà vu (chapitre précédent). □

L'espace de Sierpinski n'est pas séparé : tout ouvert qui contient b contient aussi a. Un ensemble à au moins 2 points, muni de la topologie grossière, n'est pas séparé : l'ensemble tout entier est le seul ouvert non vide.

Voisinages

Un ouvert est une partie qui « entoure » chacun de ses points. Parfois on ne s'intéresse qu'aux parties qui « entourent » un point donné, d'où la notion de voisinage.

Définition. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. Une partie $V \subseteq X$...

1. ... est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subseteq V$.
2. ... est un **voisinage ouvert** de x si V est ouvert et contient x.

On note $\mathcal{V}(x)$ ou $\mathcal{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinages (pas nécessairement ouverts) de x dans X.

Plus généralement, on dit que $V \subseteq X$ est un voisinage d'une partie $A \subseteq X$ s'il existe un ouvert U tel que $A \subseteq U \subseteq V$.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : A est un voisinage de x si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel, l'intervalle $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$, mais n'est pas un voisinage de 0 ni de 1.

Proposition. *Une partie $A \subseteq X$ est ouverte si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. ✎

1. Sens $\Rightarrow$. Si A est ouvert, alors A est évidemment voisinage (ouvert) de chacun de ses points.
2. Sens $\Leftarrow$. On suppose A voisinage de tous ses points. Pour chaque $x \in A$, il existe donc un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq A$. On a alors $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, d'où A est ouvert en tant que réunion d'ouverts.

$\square$

Suites convergentes, applications continues

Les ouverts servent à définir la convergence des suites et la continuité des applications.

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X **converge** vers le point $a \in X$ si : pour tout ouvert U contenant a, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$.

Définition. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application.

1. f est **continue** au point $a \in X$ si : pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a, tel que $f(U) \subseteq V$.
2. f est **continue** sur X si elle est continue en tout point de X.

Proposition. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} f \text{ est continue sur } X &\Leftrightarrow \text{pour tout ouvert } V \text{ de } Y,\ f^{-1}(V) \text{ est ouvert dans } X \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout fermé } G \text{ de } Y,\ f^{-1}(G) \text{ est fermé dans } X \end{aligned}$$

Très utile pour montrer que certaines parties sont ouvertes, ou fermées.

Démonstration.

1. Première équivalence : par double implication.
   a) Sens $\Rightarrow$. On suppose f continue sur X. Soit V un ouvert de Y. Si $f^{-1}(V)$ est vide, c'est un ouvert de X. Sinon, soit $x \in f^{-1}(V)$. Comme f est continue en x et que V est un ouvert de Y contenant $f(x)$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que $f(U) \subseteq V$. Alors $U \subseteq f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V)$ est voisinage de n'importe lequel de ses points x. Donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.
   b) Sens $\Leftarrow$. On suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte. Montrons que f est continue en tout point $x \in X$. Pour cela, soit V un ouvert de Y contenant $f(x)$. Par hypothèse, $U := f^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Clairement $x \in U$ et $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Donc f est continue en x.
2. Deuxième équivalence : par passage aux complémentaires.
   a) Sens $\Rightarrow$. On suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte, et on se donne un fermé G de Y. Alors $Y \backslash G$ est un ouvert de Y, donc $f^{-1}(Y \backslash G)$ est un ouvert de X, or $f^{-1}(Y \backslash G) = X \backslash f^{-1}(G)$, donc $f^{-1}(G)$ est un fermé de X.
   b) Sens $\Leftarrow$. Même idée.

$\square$

On peut reformuler les définitions en termes de voisinages :

Exercice 4.

1. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers a si et seulement si :
$$\forall V \in \mathcal{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geqslant N, x_n \in V$$
2. Montrer que f est continue en a si et seulement si
$$\forall V \in \mathcal{V}_Y(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_X(a)$$

⚠ Bien sûr, si on change de topologie alors on change la notion d'ouvert et de voisinage et donc on change possiblement les notions de limite et continuité.

3.2 Topologie induite sur une partie

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$. Pour chaque ouvert U de X, on considère l'intersection $U \cap A$: c'est la « trace » de U sur A. On vérifie facilement que la famille

$$\mathcal{O}_A := \{A \cap U\,;\, U \in \mathcal{O}_X\} \tag{3.1}$$

est une topologie sur A :

1. $A = A \cap X$ et $X \in \mathcal{O}$, donc $A \in \mathcal{O}_A$. De même, $\varnothing = A \cap \varnothing$ et $\varnothing \in \mathcal{O}$, donc $\varnothing \in \mathcal{O}_A$.
2. Si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de A, on peut trouver pour chaque $i \in I$ un $U_i \in \mathcal{O}$ tel que $V_i = A \cap U_i$, d'où $\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} A \cap U_i = A \cap \bigcup_{i \in I} U_i$. Or $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$, donc $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}_A$.
3. De même pour une intersection finie, en utilisant $\bigcup_{i=1}^{n} A \cap U_i = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$.

Définition. On dit que $\mathcal{O}_A$ est la **topologie induite** sur A par la topologie $\mathcal{O}_X$ de X.

⚠ Attention, si $B \subseteq A \subseteq X$, alors B « vit » dans deux espaces topologiques différents : dans $(X, \mathcal{O}_X)$ et dans $(A, \mathcal{O}_A)$. Certaines propriétés topologiques sont « relatives », c'est à dire qu'elles dépendent de l'espace topologique dans lequel on les considère. Par exemple, « être ouvert » est une propriété relative : il se peut que B soit ouverte dans A mais pas dans X. De même pour « être fermé ».

Exercice. $[0, 1[$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ usuel, mais est ouvert dans $[0, +\infty[$ muni de la topologie induite.

Cas d'un espace métrique Dans le cas d'un espace métrique (X, d) et une partie $A \subseteq X$, on obtient a priori deux topologies sur A : d'une part on peut munir A de la distance induite d_A et obtenir la topologie de l'espace métrique (X, d_A), d'autre part on peut considérer la topologie $\mathcal{O}_X$ de l'espace métrique (X, d_X) et obtenir la topologie induite $\mathcal{O}_A$ sur A.

Proposition. *(avec les notations qui précèdent) La topologie de l'espace métrique (A, d_A) coïncide avec la topologie induite $\mathcal{O}_A$.*

Démonstration. ✎ Il s'agit de montrer que tout ouvert U de A pour la distance d_A est de la forme $U = A \cap V$ avec V ouvert de X, et réciproquement.

— Sens $\Rightarrow$. Soit U un ouvert de A pour la distance d_A, supposé non vide sinon c'est évident. Pour chaque $x \in A$, on choisit un $r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subseteq U$. Comme on l'a déjà vu, on a donc $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r_x)$. Or on sait que $B_A(x, r_x) = A \cap B_X(x, r_x)$. Donc $U = \bigcup_{x \in U}(A \cap B_X(x, r_x)) = A \cap (\bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x))$. L'ensemble $V := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)$ est un ouvert de X, qui convient donc.

— Sens $\Leftarrow$: Soit V un ouvert de X, il s'agit alors de montrer que $U := A \cap V$ est un ouvert pour la distance d_A. C'est évident si U est vide, donc on peut supposer $U \neq \varnothing$. Pour chaque $x \in U$ il existe un $r_x > 0$ tel que $B_X(x, r_x) \subseteq V$ puisque V est ouvert pour d_X. Mais alors $B_A(x, r_x) = A \cap B_X(x, r_x)$ est contenue dans $U = A \cap V$. Donc U est bien ouvert pour d_A.

□

3.3 Base d'une topologie, topologie produit

Dans un espace métrique (X, d), les boules ouvertes jouent un rôle spécial : tout ouvert est réunion de boules ouvertes. C'est pour cette raison que la convergence et la continuité peuvent s'exprimer avec les boules ouvertes (en réalité c'est ainsi que nous les avons d'abord définies). Dans un espace topologique général $(X, \mathcal{O})$, il peut être pratique de disposer ainsi d'ouverts « de base » qui permettent de retrouver tous les ouverts.

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une **base** de $\mathcal{O}$ est une partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ telle que tout ouvert non vide $U \in \mathcal{O}$ est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Exemple. $\mathcal{B} := \{B(x, r)\,;\, x \in X, r \in \mathbb{R}_+^*\}$ est une base de la topologie d'un espace métrique (X, d).

Parfois on cherche à *définir* la topologie à partir d'ouverts « de base ». C'est précisément ce que l'on a fait dans le chapitre sur les espaces métriques : on disposait d'abord des boules ouvertes, et c'est à partir des ces ouverts particuliers que l'on a défini les ouverts généraux de l'espace métrique.

Le résultat suivant caractérise les ensembles $\mathcal{B}$ qui sont base d'une topologie sur X :

Proposition. *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X vérifiant les deux conditions :*

1. *pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$;*
2. *quels que soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et quel que soit $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Alors $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{O}$ sur X.

La première condition dit que X est réunion des éléments de $\mathcal{B}$. La deuxième condition dit que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration. Par définition, il faut définir $\mathcal{O}$ comme l'ensemble constitué de l'ensemble vide et de toutes les parties de X qui sont réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Toute la question est de savoir si cela définit effectivement une topologie sur X.

1. L'ensemble vide appartient à $\mathcal{O}$ par hypothèse, de même que X d'après la condition 1.
2. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors chaque U_i est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc la réunion de tous les U_i l'est aussi. Donc $\cup_{i \in I} U_i$ appartient à $\mathcal{O}$.
3. Pour la stabilité par intersection finie, il suffit de le montrer pour deux éléments. Soient donc $U, V \in \mathcal{O}$. Par définition, il existe des familles $(B_i)_{i \in I}$ et $(C_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $U = \cup_{i \in I} B_i$ et $V = \cup_{j \in J} C_j$. Alors $U \cap V = (\cup_{i \in I} B_i) \cap (\cup_{j \in J} C_j) = \cup_{i \in I, j \in J}(B_i \cap C_j)$ de manière purement ensembliste. Or d'après la condition 2, chaque $B_i \cap C_j$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc $U \cap V$ est réunion de réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, donc réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc appartient à $\mathcal{O}$.

□

La convergence et la continuité peuvent s'exprimer en termes d'ouverts de base :

Proposition. *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique. Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathcal{O}$*. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* X *converge vers* $x \in X$ *si et seulement si pour tout ouvert de base* $U \in \mathcal{B}$ *contenant* x*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \in U$ *pour tout* $n \geqslant N$*.*

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est évident : un ouvert de base est un ouvert particulier. Pour le sens $\Leftarrow$: en supposant la propriété vraie pour tout ouvert de base, si U est un ouvert contenant x, alors il existe un ouvert de base B tel que $x \in B \subseteq U$, d'où un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B$ pour tout $n \geqslant N$, d'où $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$. □

Proposition. *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *des espaces topologiques. Soit* $\mathcal{B}_Y$ *une base de* $\mathcal{O}_Y$*. Une application* $f : X \to Y$ *est continue au point* $x \in X$ *si et seulement si pour tout ouvert de base* $V \in \mathcal{B}_Y$ *l'image réciproque* $f^{-1}(V)$ *est un ouvert de* X*.*

⚠ Attention, on ne dit pas que $f^{-1}(V)$ doit être un ouvert de base de X ! Penser aux espaces métriques : l'image réciproque d'une boule ouverte par une application continue n'a pas de raison d'être une boule ouverte...

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est évident : un ouvert de base est un ouvert particulier. Pour le sens $\Leftarrow$, en supposant la propriété vraie pour les ouverts de base, soit V un ouvert quelconque de Y, on montre que $f^{-1}(V)$ est ouvert :

1. si $f^{-1}(V) = \varnothing$ c'est fini.
2. sinon, pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on a $f(x) \in V$ donc il existe un ouvert de base $B \in \mathcal{B}_Y$ tel que $f(x) \in B \subseteq V$. Alors $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(V)$ de manière ensembliste, et donc x appartient à l'intérieur de $f^{-1}(V)$ car $f^{-1}(B)$ est ouvert par hypothèse. Ceci étant vrai pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on en déduit que $f^{-1}(V)$ est ouvert.

□

Topologie produit (produit fini)

On se donne un nombre fini d'espaces topologiques $(X_1, \mathcal{O}_1), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ et on aimerait définir une topologie naturelle sur le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$. « Naturelle » en quel sens ? Par exemple on voudrait que les projections $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ soient continues. Mais cette condition impose à elle seule la topologie candidate $\mathcal{O}$ sur $X_1 \times \cdots \times X_n$: si toutes les projections π_i sont continues, alors quels que soient $U_1 \in \mathcal{O}_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}_n$ on doit avoir ${\pi_1}^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}, \dots, {\pi_n}^{-1}(U_n) \in \mathcal{O}$ et par suite $U_1 \times \cdots \times U_n = {\pi_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap {\pi_n}^{-1}(U_n)$ soit appartenir aussi à $\mathcal{O}$. Le résultat suivant nous dit que cette condition détermine totalement $\mathcal{O}$:

Proposition. $\mathcal{B} := \{U_1 \times \cdots \times U_n \,;\, U_1 \in \mathcal{O}_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}_n\}$ *est une base de topologie sur* $X_1 \times \cdots \times X_n$*.*

Démonstration. On utilise la caractérisation démontrée plus haut :

1. $X_1 \times \cdots \times X_n$ est un élément de $\mathcal{B}$;
2. l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{B}$:
$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$$

□

Définition. La **topologie produit** sur $X_1 \times \cdots \times X_n$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont parfois appelés **ouverts élémentaires**.

Proposition. *On munit $X_1 \times \cdots \times X_n$ de la topologie produit. Alors les projections $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ sont continues.*

Démonstration. Si $U_i \in \mathcal{O}_i$, alors ${\pi_i}^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$ qui est est un ouvert élémentaire. □

⚠ La topologie produit est « la plus petite » topologie qui rende toutes les projections continues, où « la plus petite » signifie « avec le moins d'ouverts possible » : voir le début de la section .

Cas des espaces métriques Pour simplifier, traitons le cas du produit de deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y). On a défini au chapitre précédent trois distances d_∞, d_1 et d_2 sur $X \times Y$ à partir de d_X et d_Y. Ces trois distances sont (fortement) équivalentes, par conséquent elles définissent la même topologie. D'autre part on dispose de la topologie produit pour les topologies $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ associées aux distances d_X et d_Y. En fait ce sont les mêmes topologies :

Proposition. *La topologie associée à d_∞ est la topologie produit.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout ouvert de la topologie produit est un ouvert de d_∞ et réciproquement.

1. On commence par le cas d'un ouvert élementaire $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$. Pour chaque $(x, y) \in U \times V$, il existe $r_x, r_y > 0$ tels que $B_X(x, r_x) \subseteq U$ et $B_Y(y, r_y) \subseteq V$. Posons $r := \min(r_x, r_y)$ qui est strictement positif. Ppar une propriété bien utile des boules de la distance d_∞ sur $X \times Y$:
$$B_{d_\infty}((x, y), r) = B_X(x, r) \times B_Y(y, r).$$
Donc $B_{d_\infty}((x, y), r) \subseteq U \times V$. Donc $U \times V$ est bien un ouvert pour la distance d_∞. Donc tout ouvert de la topologie produit, étant réunion d'ouverts élémentaires, est également ouvert pour d_∞.
2. Réciproquement, soit W un ouvert pour d_∞. Pour chaque $(x, y) \in W$, on choisit un $r_{x,y} > 0$ tel que $B_{d_\infty}((x, y), r_{x,y}) \subseteq W$. Alors :
$$W = \bigcup_{(x,y)\in W} B_{d_\infty}((x, y), r_{x,y}) = \bigcup_{(x,y)\in W} B_X(x, r_{x,y}) \times B_Y(y, r_{x,y}),$$
donc W est bien réunion d'ouverts élémentaires, c'est donc un ouvert de la topologie produit.

□

3.4 Position d'un point par rapport à une partie

Intérieur d'une partie

Soit $A \subseteq X$ une partie d'un espace topologique. Elle n'est pas nécessairement ouverte (pas nécessairement voisinage de tous ses points), mais elle peut être voisinage de certains points...

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$.

1. Un point $x \in X$ est **intérieur** à A dans X si A est un voisinage de x dans X, c'est-à-dire si A contient un ouvert qui contient x.
2. On appelle **intérieur** de A dans X, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A dans X.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : le point x appartient à $\mathring{A}$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.

⚠ Attention, il s'agit de notions relatives : on parle de l'intérieur de A *dans* X. Par exemple considérons $[0, 1[\subset [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$:
- l'intérieur de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ est $]0, 1[$;
- l'intérieur de $[0, 1[$ dans $[0, +\infty[$ est $[0, 1[$.

Proposition. *Propriétés de l'intérieur :*

1. $\mathring{\varnothing} = \varnothing$ *et* $\mathring{X} = X$.
2. *Pour une partie* $A \subseteq X$ *:*
   a) $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert de* X *contenu dans* A.
   b) A *est ouvert si et seulement si* $\mathring{A} = A$.

Démonstration. ✎

1. Par définition.
2. a) On montre que $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A, et que tout ouvert contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$
      i. Il est clair que $\mathring{A} \subseteq A$: si A contient un ouvert qui contient x, alors x appartient à A.
      ii. Si $x \in \mathring{A}$, soit U un ouvert tel que $x \in U \subseteq A$. Alors tout point $y \in U$ appartient à $\mathring{A}$, par définition. Ainsi $\mathring{A}$ est voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert. De plus, si U est un ouvert tel que $U \subseteq A$, alors par définition tous les points de U appartiennent à $\mathring{A}$ et donc $U \subseteq \mathring{A}$.
   b) Si A est ouvert, alors c'est le plus grand ouvert contenu dans lui-même, donc $\mathring{A} = A$. Si $\mathring{A} = A$, alors A est ouvert : on a démontré que $\mathring{A}$ est ouvert.

□

Exercice. ✎ Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ et que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

Adhérence d'une partie

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, et soit A une partie de X.

1. Un point $x \in X$ est **adhérent** à A dans X si tout voisinage de x intersecte A.
2. On appelle **adhérence** de A dans X, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A dans X.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : le point x est adhérent à A si et seulement si $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$.

⚠ La notion d'adhérence est relative : on parle de l'adhérence de A dans X. Considérons par exemple $]0,1] \subset]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$. L'adhérence de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est $[0,1]$. L'adhérence de $]0,1]$ dans $]0,+\infty[$ est $]0,1]$.

Proposition. *Propriétés de l'adhérence :*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$ *et* $\overline{X} = X$.
2. *Pour une partie* $A \subseteq X$ *:*
   a) $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de* X *contenant* A.
   b) A *est fermé si et seulement si* $\overline{A} = A$.

Démonstration. ✎

1. Par définition.
2. a) On montre que $\overline{A}$ est un fermé contenant A, et que tout fermé contenant A contient $\overline{A}$
      i. Il est clair que $A \subseteq \overline{A}$: si x appartient à A, alors tout voisinage de x contient un point de A, à savoir x.
      ii. On montre que le complémentaire de $\overline{A}$ est ouvert. Si $x \notin \overline{A}$, alors il existe un ouvert U contenant x tel que $U \cap A = \varnothing$, et alors tous les points de U sont dans le complémentaire de $\overline{A}$. Ainsi $X \backslash \overline{A}$ est voisinage de x, ce qu'on voulait montrer.
      iii. Si F est un fermé contenant A, pour montrer que $\overline{A} \subseteq F$ on montre que $X \backslash F \subseteq X \backslash \overline{A}$. Pour cela, soit $x \in X \backslash F$. Or $X \backslash F$ est ouvert (F est fermé) et $(X \backslash F) \cap F = \varnothing$, donc aussi $(X \backslash F) \cap A = \varnothing$, donc $x \notin \overline{A}$, ce qu'on voulait montrer.
   b) Si A est fermé, alors c'est le plus petit fermé qui contient A, donc $\overline{A} = A$. Si $\overline{A} = A$, alors A est fermé : on a démontré que $\overline{A}$ est fermé.

□

Exercice. ✎ Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ et que $\overline{\overline{A}} = A$.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence dans un espace métrique

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$. Alors, pour un point $x \in X$:*

$$x \in \overline{A} \iff x \text{ est la limite d'une suite convergente de points de } A.$$

⚠ L'implication $\Leftarrow$ est vraie dans tout espace topologique, mais il y a des contre-exemples pour $\Rightarrow$.

Démonstration. ✎

1. Sens $\Leftarrow$: immédiat en appliquant les définitions (convergence, adhérence).
2. Sens $\Rightarrow$. Soit $x \in \overline{A}$. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, l'intersection $A \cap B(x, 1/n)$ est non vide, donc on peut y choisir un point x_n. On obtient ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points de A qui converge vers x.

□

Corollaire. *Soit $A \subseteq X$ avec (X, d) espace métrique. Alors A est fermée si et seulement si, pour toute suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A, on a $\lim x_n \in A$.*

⚠ Ceci ne dit pas que toute suite de points d'un fermé est convergente. Seulement que, si une suite est convergente et que tous ses éléments sont dans A, alors la limite est également dans A.

Exemple. $A =]0, 1]$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ usuel car $1/n$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$: on a une suite de points de A, qui converge dans $\mathbb{R}$, mais dont la limite n'appartient pas à A.

Densité

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une partie $A \subseteq X$ est **dense** dans X si $\overline{A} = X$.

De manière équivalente, une partie A est dense dans X si tout voisinage de tout point de X contient au moins un point de A. Dans un espace métrique, on peut remplacer « tout voisinage de x » par « toute boule centrée en x », et dire que A est dense revient à dire que tout point de X est la limite d'une suite de points de A.

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ usuel. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{R})$: voir feuille TD2.

⚠ Dire qu'une partie est dense dans X, c'est dire qu'elle « remplit X presque partout ». Ceci peut être utilisé pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les $x \in X$: il suffit parfois de montrer qu'elle est vraie pour tous les x d'une partie dense (voir plus loin).

Définition. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **séparable** s'il existe une partie $A \subseteq X$ qui est dénombrable et dense dans X.

3.5 Convergence des suites. Valeurs d'adhérence

Dans un espace non séparé, la convergence peut être « étrange ». Par exemple dans l'espace de Sierpinski $X = \{a, b\}$, que dire de la convergence de la suite constante $(a, a, a, \dots)$?

Proposition. *Dans un espace topologique séparé, une suite convergente possède une unique limite.*

Démonstration. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers a dans un espace séparé X, alors elle ne converge vers aucun autre point. En effet, si $b \in X$ est différent de a, alors il existe des ouverts U, V disjoints tels que $a \in U$ et $b \in V$. Comme la suite converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$. Comme U et V sont disjoints, on a donc $x_n \notin V$ pour tout $n \geqslant N$, et donc la suite ne converge pas vers b. □

Proposition. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue au point $a \in X$. Si $x_n \to a$ dans X, alors $f(x_n) \to f(a)$ dans Y.*

Démonstration. On suppose que $x_n \to a$ dans X. Pour montrer que $f(x_n) \to f(a)$, soit V un ouvert de Y contenant $f(a)$. Par continuité, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$. Par hypothèse de convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $f(x_n) \in f(U)$ et donc $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geqslant N$, ce que l'on voulait. □

Proposition. *Dans un espace métrique, toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans un espace métrique (X, d), alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, 1)$ pour tout $n \geqslant N$. Posons :

$$r := \max(1, d(a, x_1) + 1, \dots, d(a, x_{N-1}) + 1).$$

Alors tous les termes x_n appartiennent à la boule $B(a, r)$. Donc la suite est bornée. □

Suites d'un produit

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Se donner une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $X \times Y$ revient à se donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Y.

Proposition. *$(x_n, y_n) \to (a, b)$ dans $X \times Y$ si et seulement si $x_n \to a$ dans X et $y_n \to b$ dans Y.*

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: résulte de la continuité des projections et de la proposition ci-dessus reliant continuité et convergence des suites.
2. Sens $\Leftarrow$. On suppose que $x_n \to a$ et $y_n \to b$. Pour montrer que $(x_n, y_n) \to (a, b)$, soit $U \times V$ un ouvert élémentaire de $X \times Y$. Par hypothèse, il existe N_1 tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geqslant N_1$, et il existe N_2 tel que $y_n \in V$ pour tout $n \geqslant N_2$. En posant $N := \max(N_1, N_2)$, on a donc $(x_n, y_n) \in U \times V$ pour tout $n \geqslant N$, ce que l'on voulait.

□

⚠ Généralisation immédiate à un produit fini d'espaces topologiques.

Exemple. Une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si chaque « suite de coordonnées » converge dans $\mathbb{R}$ usuel.

Valeurs d'adhérence

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Un point $a \in X$ est **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage V de a il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n \in V$.

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors $a \in X$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Démonstration. ✎ Double implication.

1. Sens $\Leftarrow$ (vrai dans tout espace topologique). Si $x_{\phi(n)} \to a$ alors tout voisinage de a contient tous les $x_{\phi(n)}$ pour n assez grand, donc contient une infinité de termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sens $\Rightarrow$ (propre aux espaces métriques). On suppose que tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite. En particulier $B(a, 1)$ doit contenir un terme $x_{\phi(1)}$. Puis on construit par récurrence une extractrice ϕ de sorte que $x_{\phi(n)} \in B(a, 1/n)$ pour tout $n \geqslant 1$. On obtient ainsi une suite extraite qui converge vers a.

□

⚠ Le sens $\Rightarrow$ peut être faux dans un espace topologique non métrisable.

Proposition. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé dans$X$.*

Démonstration. ✎ On montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$ est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geqslant n\}}$:

$$\begin{aligned}
&a \in X \text{ est valeur d'adhérence de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&\Leftrightarrow \text{tout voisinage de } a \text{ contient une infinité de termes de la suite}\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout voisinage } V \text{ de } a \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un } p \geqslant n \text{ tel que } x_p \in V\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout voisinage } V\text{de } a, \text{ il existe un } p \geqslant n \text{ tel que } x_p \in V\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ tout voisinage } V \text{ de } a \text{ intersecte } \{x_p\,;\, p \geqslant n\}\\
&\Leftrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a \in \overline{\{x_p\,;\, p \geqslant n\}}\\
&\Leftrightarrow a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p\,;\, p \geqslant n\}}
\end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence est une intersection de fermés, donc c'est un fermé. □

3.6 Continuité des applications

Caractérisation séquentielle de la continuité dans les espaces métriques

Dans les espaces métriques, la continuité peut se formuler en termes de convergence de suites :

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si :*

> *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X telle que $x_n \to_{n\to\infty} a$ dans X, alors $f(x_n) \to_{n\to\infty} f(a)$ dans Y.*

⚠ Le sens $\Leftarrow$ peut être faux dans des espaces topologiques non métriques.

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: déjà vu.
2. Sens $\Leftarrow$: par contraposée. On suppose que f n'est pas continue en a. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ l'image $f(B(a, \delta)$ n'est pas contenue dans $B(f(a), \varepsilon$. On choisit un tel ε. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc un point $x_n \in B(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$. Ceci définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de X telle que $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to f(a)$.

□

Opérations sur les fonctions continues

Proposition. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(Z, \mathcal{O}_Z)$ trois espaces topologiques, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.*

1. *Si f est continue en $a \in X$ et si g est continue en $f(a) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue en a.*
2. *Si f est continue sur X et si g est continue sur Y, alors $g \circ f$ est continue sur X.*

Démonstration.

1. Si W est un voisinage de $g(f(a))$, alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(a)$, donc $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de a. Or $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$.
2. Même chose avec des ouverts.

□

Proposition. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application continue, et soit $A \subseteq X$. Alors la restriction $f_{\restriction A} : A \to Y$ est continue (pour la topologie induite sur A).*

Démonstration. Par définition : si V est un ouvert de Y, alors ${f_{\restriction A}}^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$. □

Proposition. *Soient $(X\mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Alors les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.*

Démonstration. Déjà vu : définition de la topologie produit. □

Proposition. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, et soit $f : X \to Y \times Z$. On écrit $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : X \to Z$. Alors f est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.*

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: conséquence de la proposition précédente.
2. Sens $\Leftarrow$: on utilise la base d'ouverts de $Y \times Z$. Soit $x \in X$, et soit $(y, z) := f(x) \in Y \times Z$. Si V (respectivement W) est un voisinage ouvert de y (respectivement de z), alors $V \times W$ est un voisinage ouvert de base de (y, z), et $f^{-1}(V \times W) = {f_1}^{-1}(V) \cap {f_2}^{-1}(W)$ est donc un voisinage ouvert de x car ${f_1}^{-1}(V)$ et ${f_2}^{-1}(W)$ sont des ouverts de X (continuité).

□

Proposition. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, soit (E, N) un espace vectoriel normé réel.*

1. *Si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont continues, alors $f + g : X \to E$ est continue.*
2. *Si $f : X \to E$ est continue et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f : X \to E$ est continue.*

Démonstration. Résulte de la continuité des opérations + et · dans un espace vectoriel normé :

1. L'addition $E \times E \to E$ est continue (topologie produit sur $E \times E$) car lipschitzienne : $d(u+v, u'+v') = \|(u+v)-(u'+v')\| \leqslant \|u-u'\| + \|v-v'\| = d_1((u,v),(u',v'))$. Pour conclure, il suffit de dire que $f + g : X \to E$ est la composée de $x \mapsto (f(x), g(x))$ qui est continue, et de l'addition dans E :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & E \times E \arrow[r, "\text{addition}"] & E \\ x \arrow[r, mapsto] & (f(x), g(x)) \arrow[r, mapsto] & f(x) + g(x) \end{tikzcd}$$

2. Pour la continuité de λf, soit $a \in X$ et soit $B(f(a), r)$ une boule de rayon $r > 0$ centrée en $f(a)$. Comme f est continue en a, il existe un voisinage ouvert U de a dans X tel que $f(U) \subseteq B(f(a), r/\lambda)$. On en déduit que $\lambda f(U) \subseteq B(f(a), r)$ comme on le voulait.

□

Proposition. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, et soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f et g sont continues, alors fg est continue.*
2. *L'ensemble $U := \{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X, et $1/f : U \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, il suffit d'observer que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est continue et de voir $x \mapsto f(x)g(x)$ comme composée de deux applications continues. De même pour le deuxième point (continuité de la fonction inverse $t \mapsto 1/t$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$). $\square$

Exemple. On identifie l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, et le munit de la distance d_∞ correspondante. Pour cette distance, il est clair que toutes les opérations matricielles sont continues (addition de deux matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire, multiplication de deux matrices, inversion d'une matrice inversible), de même que les fonctions « déterminant », « trace », etc. En effet, toutes ces applications et fonctions se définissent à partir des coefficients des matrices, par additions et multiplications dans $\mathbb{R}$, et donc peuvent se décomposer comme compositions, sommes et produits d'applications continues. On en déduit que :

1. Une suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}$ quels que soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Par exemple, $A - \frac{1}{k} I_n$ converge vers A lorsque $k \to +\infty$.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, c'est d'ailleurs un ouvert dense. La densité permet des démonstrations... par densité (voir exercices).
3. L'ensemble des matrices symétriques (de même antisymétriques) est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
4. $O(n)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, et même un compact (fermé borné).

Exemple d'utilisation de la densité

On veut montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (polynômes caractéristiques) quelles que soient les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pour cela :

1. C'est vrai si A est inversible, car alors AB et BA sont semblables, donc ont même polynôme caractéristique : $AB = A(BA)A^{-1}$.
2. Puis on raisonne par densité et continuité du déterminant : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est quelconque, il existe une suite de matrices inversibles A_k qui converge vers A (densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$), d'où :

$$\begin{aligned}
\chi_{AB}(X) &= \det(XI_n - AB) = \lim_{k\infty} \det(XI_n - A_kB) = \lim_{k\infty} \chi_{A_kB}(X) \\
&= \lim_{k\infty} \chi_{BA_k}(X) = \lim_{k\infty} \det(XI_n - BA_k) = \det(XI_n - BA) \\
&= \chi_{BA}(X)
\end{aligned}$$

3.7 Homéomorphismes

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est un **homéomorphisme** de X sur Y si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues. On dit que X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

⚠ La réciproque d'une application bijective continue n'est pas nécessairement continue. Par exemple, posons dans $\mathbb{R}^2$ usuel :
- $X := (]-\infty, 0[\times\{1\}) \cup ([0, +\infty[\times\{2\})$
- $Y := \mathbb{R} \times \{0\}$

et définissons $f : X \to Y$ par $f(x, \star) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (avec $\star = 1$ ou 2 selon le cas). Alors f est bijective, continue, mais sa réciproque f^{-1} n'est pas continue : par exemple $f^{-1}(-1/n) = (-1/n, 1)$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui ne converge pas vers $f^{-1}(0) = (0, 2)$.

⚠ Dire que deux espaces métriques (plus généralement topologiques) sont homéomorphes, c'est qu'ils sont « les mêmes » du point de vue de la topologie : non seulement un homéomorphisme $f : X \to Y$ réalise une bijection entre les points de X et ceux de Y, mais aussi entre les *ouverts* de X et ceux de Y. En effet, si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$:

$$A \text{ est ouvert dans } X \text{ si et seulement si } f(A) \text{ est ouvert dans } Y$$
$$B \text{ est ouvert dans } Y \text{ si et seulement si } f^{-1}(B) \text{ est ouvert dans } X$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ usuel, tous les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $a < b$ sont homéomorphes (éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$).
2. Dans $\mathbb{R}^2$ usuel, un carré et un cercle sont homéomorphes.
3. Dans $\mathbb{R}$ usuel, $[0, 1]$ et $[0, 1[$ ne sont pas homéomorphes, pourquoi ?
4. Toute isométrie est un homéomorphisme.

4 Compacité

La compacité est une notion *topologique*. Elle exprime une notion de finitude : les espaces compacts se comportent, dans certains cas, « un peu comme des ensembles finis ».

4.1 Recouvrements

Soit X un ensemble. Un **recouvrement** de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. L'ensemble d'indices I est quelconque (pas nécessairement fini, ni même dénombrable). Par abus de langage, on dit souvent « le recouvrement $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ ».

Exemple. Deux exemples « extrêmes » de recouvrement :
- X se recouvre lui-même : $X = X$; ici la famille est constituée d'un seul ensemble.
- X est recouvert par ses singletons : $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$; ici la famille est indexée par les points de X.

On parle de **recouvrement fini** si l'ensemble d'indices I est fini. Par exemple le recouvrement « $X = X$ » est fini. Le recouvrement $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ est évidemment infini si et seulement si X est infini.

Sous-recouvrements Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, et si J est une partie de I telle que $X = \bigcup_{i\in J} A_i$, on dit que $(A_i)_{i\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$. Si de plus J est fini, on parle de **sous-recouvrement fini**.

Recouvrements ouverts Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Un **recouvrement ouvert** de X est un recouvrement de X par une famille d'ouverts de X.
⚠ On s'intéresse particulièrement à la question suivante : étant donné un recouvrement ouvert quelconque, en existe-t-il toujours un sous-recouvrement fini ?

Exemple. Des exemples de recouvrements ouverts :
- L'ensemble X est toujours un ouvert de lui-même donc « $X = X$ » est un recouvrement ouvert fini.
- Dans un espace métrique (X, d) : pour chaque $r > 0$, la famille des boules ouvertes de rayon r est un recouvrement ouvert de X puisque $X = \bigcup_{x\in X} B(x, r)$. Si X est infini, c'est un recouvrement ouvert infini.
- $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ est un recouvrement ouvert infini.
- Dans un espace discret, $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ est un recouvrement ouvert (fini si X est fini, infini sinon).

4.2 Espaces topologiques compacts

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.

1. On dit que X est **quasi-compact** si, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.
2. On dit que X est compact s'il est quasi-compact et séparé.

On exprime souvent la quasi-compacité en disant « de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini ».

⚠ On s'intéressera plus à la quasi-compacité (qui est la propriété fondamentale de la compacité) qu'à la séparation (une condition « technique » qui joue parfois un rôle important, mais pas toujours). La plupart du temps, on supposera les espaces séparés, et on indiquera les endroits où cette hypothèse est utilisée. Bien noter que tout espace métrique est séparé.

⚠ Dire que X est compact ne revient pas à dire que tout recouvrement ouvert est fini (c'est faux la plupart du temps), ni qu'il existe un recouvrement ouvert fini (c'est toujours vrai : X se recouvre lui-même...)

Exemples ✎

1. Tout espace topologique fini est quasi-compact (et donc tout espace topologique fini et séparé est compact). En effet, si X est fini alors il ne possède qu'un nombre fini d'ouverts, quelle que soit la topologie.
2. Tout espace topologique grossier est quasi-compact (mais pas compact, car non séparé, dès qu'il y a au moins deux points). En effet, la topologie grossière ne contient que deux ouverts.
3. Un espace topologique discret (donc séparé) est compact si et seulement s'il est fini. En effet : dans un sens on vient de le dire plus haut, dans l'autre sens $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ est un recouvrement ouvert de X, et dire qu'il en existe un sous-recouvrement fini c'est dire que X est fini.
4. $\mathbb{R}$ usuel n'est pas compact : la famille d'intervalles $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ dont il n'existe pas de sous-recouvrement fini.

La compacité est une notion topologique : si deux espaces topologiques sont « les mêmes » topologiquement, alors ils sont simultanément compacts ou non compacts. Précisément :

Proposition. *Soient X et Y deux espaces topologiques homéomorphes. Alors X est compact si et seulement si Y est compact.*

Démonstration. ✎ Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Alors f réalise une bijection entre les *points* de X et ceux de Y, ainsi qu'entre les *ouverts* de X et ceux de Y. Supposons par exemple que X est compact et montrons qu'alors Y est aussi compact. Pour cela, soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Y. Alors, par continuité, chaque $U_i := f^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X. De plus $X = \bigcup_{i\in I} U_i$: si $x \in X$, alors $f(x) \in Y$ donc il existe un $i \in I$ tel que $f(x) \in V_i$, d'où $x \in f^{-1}(V_i) = U_i$. Ainsi $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, donc par compacité il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. On en déduit que $Y = \bigcup_{i\in J} V_i$: si $y \in Y$, alors $f^{-1}(y)$ est un élément de X donc il existe un $i \in J$ tel que $f^{-1}(y) \in U_i$, d'où $y = f((f^{-1}(y)) \in V_i$. □

La compacité peut s'exprimer au moyens des fermés :

Proposition. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Alors X est quasi-compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $\bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing$.*

Démonstration. Par passage aux complémentaires. □

On utilise souvent le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique quasi-compact. Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.*

Démonstration. Par contraposée : si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, alors par compacité il existe $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k \in \mathbb{N}$ en nombre fini tels que $F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k} = \varnothing$. Mais comme la suite est décroissante, $F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$, donc l'un des fermés est vide. □

Remarques sur la séparation

1. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est séparé alors $A \subseteq X$ munie de la topologie induite est également séparée.En effet, soient $a, b \in A$ distincts. Il existe deux ouverts U, V de X tels que $a \in U$, $b \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. Mais alors $A \cap U$ est un ouvert de A contenant a, $A \cap V$ est un ouvert de A contenant b, et $(A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap (U \cap V) = \varnothing$. On a bien trouvé deux ouverts de A qui séparent a et b.
2. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_{Y)})$ sont séparés, alors $X \times Y$ muni de la topologie induite est également séparé. En effet, soient (x, y) et (x', y') deux points distincts de $X \times Y$. Alors $x \neq x'$ ou $y \neq y'$ (voire les deux). Supposons par exemple que $x \neq x'$. Par séparation de X, il existe deux ouverts U, U' de X tels que $x \in U$, $x' \in U'$ et $U \cap U' = \varnothing$. Mais alors $U \times Y$ est un ouvert (élémentaire) de $X \times Y$ contenant (x, y), de même $U' \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$ contenant (x', y), et $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \varnothing$. On a bien trouvé deux ouverts de $X \times Y$ qui séparent (x, y) et (x', y).

4.3 Parties compactes d'un espace topologique

Il arrive souvent que l'on se place dans un espace topologique « ambiant » X, compact ou non, et que l'on s'intéresse aux parties $A \subseteq X$. On dit que A est une **partie compacte** de X (respectivement une **partie quasi-compacte** de X) si A est un espace compact (respectivement quasi-compact) pour la topologie induite.

Remarque. ⚠ « Être une partie compacte » est une propriété absolue au sens où elle ne dépend que de la partie et sa topologie et non de la partie dans l'espace topologique ambiant. Comparer avec la propriété « être une partie fermée » par exemple, qui est relative : la partie A est toujours fermée « dans elle-même », mais pas forcément fermée dans X.

On aimerait caractériser la compacité d'une partie $A \subseteq X$ au moyen des ouverts de X. Pour cela, on se souvient que les ouverts de A pour la topologie induite, sont les parties de la forme $A \cap U$ avec U ouvert de X.

Proposition. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. Alors A est une partie quasi-compacte de X si et seulement si :*

> *quelle que soit la famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X telle que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$, il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $A \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$.*

Démonstration. Se donner un recouvrement ouvert de A pour la topologie induite, c'est se donner une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de A telle que $A = \bigcup_{i \in I} U_i$. On sait que chaque U_i est de la forme $U_i = A \cap V_i$ avec V_i ouvert de X. Donc $A = \bigcup_{i \in I}(A \cap V_i) = A \cap \bigcup_{i \in I} V_i$. Mais ceci équivaut à $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. D'où la conclusion. $\square$

Exemple. Soit X un espace topologique séparé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $a \in X$. Alors $\{a\} \cup \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie compacte de X.

Théorème. *Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ est compact dans $\mathbb{R}$ usuel.*

Démonstration. $\mathbb{R}$ est séparé, donc il s'agit de montrer la quasi-compacité.

1. On commence par prouver la quasi-compacité pour les recouvrements de $[a, b]$ par des *intervalles* ouverts. On raisonne par l'absurde. Supposons que $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} I_i$, où chaque I_i est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et supposons (raisonnement par l'absurde) que l'on ne puisse recouvrir $[a, b]$ par aucun sous-recouvrement fini.
   — On procède par dichotomie. Nécessairement, au moins l'un des deux intervalles $[a, (a + b)/2]$ et $[(a + b)/2]$ n'est recouvert par aucun sous-recouvrement fini ; notons $[a_1, b_1]$ l'un de ces deux intervalles qui n'est recouvert par aucune sous-famille finie de $(I_i)_{i \in I}$. Alors de même l'un des deux intervalles $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ et $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ n'est recouvert par aucune sous-famille finie de $(I_i)_{i \in I}$; notons $[a_2, b_2]$ un tel intervalle. etc.
   — On obtient ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que :
      a) la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
      b) $b_n - a_n = (b - a)/2^n$, donc $\lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$;
      c) $[a_n, b_n]$ n'est recouvert par aucune sous-famille finie de $(I_i)_{i \in I}$.
   — Ainsi les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles ont une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$, vérifiant $a \leqslant a_n \leqslant \ell \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette limite ℓ doit appartenir à un des intervalles du recouvrement, disons $\ell \in I_{i_0}$ avec $i_0 \in I$.

— Mais comme I_{i_0} est un intervalle ouvert contenant ℓ et que $a_n \to \ell$ et $b_n \to \ell$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n, b_n \in I_{i_0}$ pour tout $n \geqslant N$. Ce qui est une **contradiction** : $[a_N, b_N]$ n'est recouvert par aucune sous-famille finie de $(I_i)_{i\in I}$, et en même temps $[a_N, b_N]$ est contenu dans I_{i_0}...

2. On généralise ceci aux recouvrements par des ouverts quelconques. Supposons que $[a,b] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, où chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   — On sait que chaque ouvert U_i est une réunion d'intervalles ouverts : $I_i = \bigcup_{x\in I_i}]x-r_x, x+r_x[$, où $r_x > 0$ est choisi assez petit pour que $]x-r_x, x+r_x[\subseteq I_i$.
   — On obtient ainsi un recouvrement de $[a,b]$ par des intervalles ouverts. D'après la première partie de la preuve, il en existe un sous-recouvrement fini : il existe $x_1, \ldots, x_N \in [a,b]$ tels que

$$[a,b] \subseteq]x_1 - r_{x_1}, x_1 + r_{x_1}[\cup \cdots \cup]x_N - r_{x_N}, x_N + r_{x_N}[$$

   — Comme chaque $]x_k - r_{x_k}, x_k + r_{x_k}[$ est contenu dans un des I_i, on obtient ainsi un sous-recouvrement *fini* de $[a,b] \subseteq \bigcup_{i\in I} I_i$.

□

4.4 Compacité dans les espaces métriques

Dans les espaces métriques (automatiquement séparés), il y a équivalence entre deux notions de compacité :
— la quasi-compacité, formulée en termes de recouvrements ouverts ;
— la compacité séquentielle, formulée en termes de suites.

⚠ Dans un espace topologique séparé quelconque, quasi-compacité entraîne compacité séquentielle mais pas réciproquement.

Précompacité

Définition. Un espace métrique X est **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Proposition. *Tout espace métrique compact est précompact.*

Démonstration. ✎ On observe que $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon)$ et on applique la définition de la compacité. □

Remarque. Il existe des espaces métriques qui sont précompacts mais pas compacts, par exemple $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ avec la topologie usuelle (la précompacité est facile à montrer, pour la non-compacité on peut anticiper et dire que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas séquentiellement compact).

Nombre de Lebesgue d'un recouvrement ouvert

Définition. Soit X un espace métrique, et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Un **nombre de Lebesgue** pour le recouvrement $\mathcal{U}$ est un réel $\varepsilon > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon ε soit contenue dans un des ouverts du recouvrement :

$$\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{U} \mid B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Proposition. *Soit X est un espace métrique compact. Alors tout recouvrement ouvert de X admet un nombre de Lebesgue.*

Démonstration. On suppose que (X, d) est compact et on se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X.

1. Pour chaque $x \in X$, on choisit un indice $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$. Comme $U_{i(x)}$ est ouvert, on peut choisir un réel $r(x) > 0$ tel que $B(x, 2r(x)) \subseteq U_{i(x)}$.
2. On a $X = \bigcup_{x\in X} B(x, r(x))$. Donc, par compacité, il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que Par compacité, on peut trouver un nombre fini de points tels que $X = B(x_1, r(x_1)) \cup \cdots \cup B(x_n, r(x_n))$.
3. On montre que $\varepsilon := \min(r(x_1), \dots, r(x_n))$ est un nombre de Lebesgue du recouvrement. Pour cela, soit $x \in X$ quelconque.
   a) Il existe alors un $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in B(x_k, r(x_k))$.
   b) Si $y \in B(x, \varepsilon)$, alors $d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) < \varepsilon + r(x_k) \leqslant 2r(x_k)$, donc $y \in B(x_k, 2r(x_k))$. Or $B(x_k, 2r(x_k)) \subseteq U_{i(x_k)}$. Donc $y \in U_{i(x_k)}$
   c) On vient de montrer qu'il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i(x_k)}$.

   Ainsi toute boule de rayon ε est contenue dans l'un des $U_{i(x_1)}, \dots, U_{i(x_k)}$, ce qu'on voulait montrer.

□

Théorème de Bolzano-Weierstrass C'est le théorème qui énoncé l'équivalence entre les deux notions de compacité.

Théorème. *Un espace métrique X est compact si et seulement si toute suite de points de X admet une sous-suite convergente.*

Preuve sens ⇒ On suppose X compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. On a vu dans le chapitre précédent que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, donc par compacité cet ensemble n'est pas vide. D'autre part on a vu que, dans un espace métrique, toute valeur d'adhérence est limite d'une suite extraite. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

Preuve sens $\Leftarrow$ On se sert de deux résultats intermédiaires : lemmes 1 et 2 ci-dessous.

Lemme 5. *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Alors tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X possède un nombre de Lebesgue , c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall x \in X, \exists i \in I\,;\, B(x,\varepsilon) \subseteq U_i.$$

Démonstration. On se donne un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X séquentiellement compact, et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de nombre de Lebesgue $\varepsilon > 0$.

1. En appliquant cette hypothèse à $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, on construit une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que chaque boule $B(x_n, 1/n)$ n'est contenue dans aucun des ouverts du recouvrement.
2. Par hypothèse de compacité séquentielle, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in X$.
3. Le point a appartient à l'un des ouverts U_i du recouvrement, et il existe donc un $r > 0$ tel que $a \in B(a,r) \subseteq U_i$.
4. Si n est assez grand, on aura à la fois :
   — $x_{\varphi(n)} \in B(a, r/2)$, car $x_{\varphi(n)} \to a$;
   — $1/\varphi(n) < r/2$, car $\varphi(n) \to +\infty$.
   Mais ces deux conditions entraînent $B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subseteq B(a,r) \subseteq U_i$ par inégalité triangulaire, et ceci **contredit** le choix de $x_{\varphi(n)}$.

□

Lemme 6. *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de X par une famille finie de boules de rayon ε.*

Démonstration. On démontre la contraposée : s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que X ne puisse pas être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, alors X n'est pas séquentiellement compact. En effet, pour un tel $\varepsilon > 0$ on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_p) \geqslant \varepsilon$ dès que $n \neq p$:

— On prend un $x_1 \in X$ quelconque. Comme $B(x_1, \varepsilon)$ ne recouvre pas X, le complémentaire $X \backslash B(x_1,\varepsilon)$ n'est pas vide et on choisit un $x_2 \in X\backslash B(x_1,\varepsilon)$. On a donc $d(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon$.
— La réunion finie $B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$ ne recouvre pas X, donc on peut choisir un $x_3 \notin B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$. Donc $d(x_1,x_2)$ et $d(x_1,x_3)$ et $d(x_2,x_3)$ sont tous $\geqslant \varepsilon$.
— Par récurrence, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points tels que $d(x_n,x_p) \geqslant \varepsilon$ si $n \neq p$.

Une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas posséder de valeur d'adhérence, donc X n'est pas séquentiellement compact. □

Fin de la preuve sens $\Leftarrow$ On suppose X séquentiellement compact, et on se donne un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue pour ce recouvrement (Lemme 1). Soit $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$ un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε (Lemme 2). Chaque boule $B(x_k, \varepsilon)$ est contenue dans un ouvert U_{i_k} du recouvrement. On a donc $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, ce qu'on voulait.

Exercice. Dans les espaces métriques, on peut utiliser la compacité séquentielle pour redémontrer certaines propriétés. Par exemple, si (X, d) est métrique et $A \subseteq X$, alors on a vu que :

1. Si A est compacte, alors A est fermée dans X.
2. Si X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte.

Démonstration en utilisant la compacité séquentielle :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge vers un point $a \in X$. Alors nécessairement $a \in A$, puisque (par compacité) il existe une sous-suite qui converge dans K.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A, alors c'est une suite de points de X, donc (par compacité de X) on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point de X. Mais comme A est fermé, la limite de cette sous-suite convergente doit appartenir à A. Donc il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans A.

4.5 Propriétés de la compacité

Pour simplifier, on va supposer que tous les espaces sont séparés. On indiquera les endroits où cette hypothèse joue un rôle.

Proposition. *Soit X un espace topologique séparé, et soit $A \subseteq X$.*

1. *Si A est compacte, alors A est fermée dans X.*
2. *Si X est compact et si A est fermée dans X, alors A est compacte.*

Remarque. L'hypothèse« X séparé » est importante dans le premier point (voir la démonstration). Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie du complémentaire fini, qui n'est pas séparée, les seules parties fermées autres que $\mathbb{R}$ sont les parties finies, mais toute partie est quasi-compacte.

Démonstration.

1. Soit A compacte dans X séparé. Pour montrer que A est fermée, on montre que $X\backslash A$ est ouverte. Pour cela, soit $x \in X\backslash A$. Pour chaque $a \in A$, on peut disjoindre a et x par des ouverts : il existe $U_a, V_a \in \mathcal{O}_X$ tels que $a \in U_a$, $x \in V_a$ et $U_a \cap V_a = \varnothing$. Clairement $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$, donc par hypothèse de compacité il existe un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$. Prenons alors $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$: c'est un voisinage ouvert de x dans X, dont l'intersection avec chacun des $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$ est vide. Donc $V \cap A = \varnothing$. On vient donc de construire un voisinage ouvert V de x tel que $V \subseteq X\backslash A$. Donc $X\backslash A$ est ouvert, ce que l'on voulait montrer.

2. Soit A fermée dans X compact. Soit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement de A par des ouverts de X. Comme A est fermée, son complémentaire $X \backslash A$ est un ouvert de X, et donc $X = (X \backslash A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, il en existe un sous-recouvrement fini : $X = (X \backslash A) \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, d'où $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, un sous-recouvrement fini de A comme on le voulait.

□

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie compacte de X. Alors A est bornée.*

Démonstration. On a certainement $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, 1)$. Par compacité, il existe un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $A \subseteq B(a_1, 1) \cup \cdots \cup B(a_n, 1)$. Les boules sont bornées, et une réunion finie de bornés est bornée, donc A est bornée. □

Proposition. *Soit X un espace topologique séparé. Alors :*

1. *Une union finie de parties compactes de X est compacte.*
2. *Une intersection quelconque de parties compactes de X est compacte.*

Démonstration.

1. Avec des recouvrements ouverts.
2. L'intersection est fermée et contenue dans l'un quelconque des compacts.

□

Proposition. *Le produit de deux espaces compacts est compact.*

On va se contenter de donner la démonstration pour les espaces métriques, car celle pour les espaces topologiques généraux est un peu plus difficile (voir exercices).

Démonstration. (pour des espaces métriques, avec la compacité séquentielle) Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Montrons que $X \times Y$ est séquentiellement compact. Pour cela, soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $X \times Y$. Puisque X est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in X$. L'extraction correspondante $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Y, donc par compacité il en existe une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $b \in Y$. Mais alors $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, donc elle continue de converger vers a dans X. Par conséquent la suite $(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et converge vers (a, b) dans $X \times Y$. □

Corollaire. *Un produit fini d'espaces compact est compact.*

Exemple. Tout produit de segments $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ usuel.

Conséquence : les compacts de $\mathbb{R}^n$

Théorème. *(Heine-Borel) Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées bornées de $\mathbb{R}^n$ (bornées pour la distance d_∞).*

Démonstration.
1. On a déjà vu que les parties compactes doivent être fermées et bornées.
2. Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.
   a) Alors $A \subseteq [-R, R]^n$ pour $R > 0$ suffisamment grand (partie bornée pour d_∞).
   b) D'autre part A est fermée dans $\mathbb{R}^n$, donc elle est également fermée dans $[-R, R]^n$ (le vérifier).
   c) Or on vient de voir que $[-R, R]^n$ est compact. Ainsi A est fermée dans un compact, donc A est compacte.

□

Des partie fermées bornées mais non compactes ? ⚠ Le théorème de Heine-Borel est très spécifique : il parle des compacts de $\mathbb{R}^n$ usuel, et « borné » se réfère à la distance d_∞ (ou à toute distance fortement équivalente). Dans un autre espace métrique, le résultat peut être faux. Quelques exemples simples :
1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance $d = \min(1, d_\infty)$: l'espace tout entier est borné et fermé (dans lui-même) mais il n'est pas compact (pourquoi ?)
2. Tout espace discret infini est borné et fermé (dans lui-même), mais pas compact.
3. Dans $\mathbb{Q}$ usuel, la partie $\mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ est bornée et fermée (pourquoi ?) mais pas compacte (pourquoi ?)
4. Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon > 0 ne sont pas compactes (voir chapitre ultérieur).

4.6 Compacité et continuité

⚠ Pour simplifier, on continue à supposer que les espaces topologiques sont *séparés.*

Théorème. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques séparés, et soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors $f(X)$ est une partie compacte de Y.*

Il s'agit en fait d'une propriété de quasi-compacité, la séparation ne joue aucun rôle.

Démonstration. Soit $f(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ un recouvrement de $f(X)$ par des ouverts de Y. Alors chaque $U_i := f^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X car f est continue, et $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (vérifier) Par quasi-compacité de X, il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$. On en déduit que $f(X) \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$ [vérifier]. Donc $f(X)$ est bien quasi-compacte. □

Exercice. Prouver le résultat pour des espaces métriques en utilisant la compacité séquentielle.

Théorème. *Soit X un espace topologique compact, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a, b \in X$ tels que*

$$\forall x \in X, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Démonstration. D'après ce qui précède, $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Donc $f(X)$ est une partie fermée, bornée pour la distance usuelle. Par conséquent, $\inf f(X)$ et $\sup f(X)$ sont des nombres finis et de plus ils appartiennent à $f(X)$. D'où $a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf f(X)$ et $f(b) = \sup f(X)$, ce que l'on voulait. □

Exercice 7. Donner une démonstration dans le cadre métrique en utilisant la compacité séquentielle.

Théorème. *(Heine) Soient X un espace métrique compact, et Y un espace métrique quelconque. Toute application continue $f : X \to Y$ est* uniformément continue *sur X.*

⚠ La continuité uniforme est une notion métrique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,; \, \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Démonstration. Par contraposée : si f n'est pas uniformément continue, alors elle n'est pas continue quelque part. Si f n'est pas uniformément continue sur X, alors il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel, quel que soit $\delta > 0$, on peut trouver $x, x' \in X$ vérifiant $d_X(x, x') < \delta$ mais $d_Y(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon$. En prenant $\delta = 1/n$, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X tels que $d_X(x_n, x'_n) < 1/n$ et $d_Y(f(x_n), (x'_n)) \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in X$, et on a alors aussi $y_{\varphi(n)} \to a$ quand $n \to +\infty$. Mais l'application f ne peut alors pas être continue en a, car au moins l'une des deux suites $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(x'_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$, puisque les termes de ces suites sont à distance $\geqslant \varepsilon$. □

4.7 Application de la compacité : équivalence des normes en dimension finie

Théorème. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On va démontrer qu'elle est équivalente à la norme $\| \, \|_\infty$.

1. Considérons la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &\leqslant |x_1| N(e_1) + \cdots + |x_n| N(e_n) \\ &\leqslant [N(e_1) + \cdots + N(e_n)] \|x\|_\infty \end{aligned}$$

   D'où $N(x) \leqslant \alpha \|x\|_\infty$ pour une certaine constante $\alpha > 0$.

2. Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, considérons la norme N comme une fonction $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\| \|_\infty$. On vient justement de voir que N est α-lipschitzienne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant \alpha \|x - y\|_\infty$$

En particulier N est continue. Donc elle est bornée, et atteint ses bornes, sur la sphère unité S de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ qui est compacte puisque fermée bornée. De plus elle est strictement positive sur S, car c'est une norme. Donc il existe un point $a \in S$ tel que

$$\forall x \in S,\ 0 < N(a) \leqslant N(x)$$

Posons $\beta := N(a)$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est différent de $0_{\mathbb{R}^n}$, alors $x/\|x\|_\infty$ appartient à S, donc $N(x/\|x\|_\infty) \geqslant \beta$, ce qui s'écrit aussi $N(x) \geqslant \beta\|x\|_\infty$ puisque N est une norme. On a donc

$$\beta\|x\|_\infty \leqslant N(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (l'inégalité est évidemment une égalité pour $x = 0_{\mathbb{R}^n}$).

□

5 Connexité

Introduction

Intuition : un espace topologique est « connexe » s'il est constitué d'un seul « morceau ». Par exemple, $[0,1]$ muni de la topologie usuelle semble constitué d'un seul morceau (on dira donc qu'il est connexe), alors que $[0,1] \cup [2,3]$ semble constitué de deux morceaux (on dira donc qu'il n'est pas connexe). Ou encore : l'ensemble $\{a, b, c\}$ muni de la topologie grossière est connexe (les points a, b, c sont en quelque sorte indiscernables par la topologie grossière et forment un tout) alors que le même ensemble muni de la topologie discrète n'est pas connexe (chaque singleton est ouvert et semble former un morceau).

Qu'est-ce qu'un « morceau » du point de vue de la topologie ? Tout ensemble constitué d'au moins 2 points peut se décomposer en deux parties non vides disjointes. Par exemple, on peut écrire $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$, mais cette décomposition *ensembliste* en deux parties disjointes ne rend pas justice à la topologie : elle ne voit pas que le point 1 est « collé », c'est à dire adhérent, à $[0,1[$. On n'a donc pas envie de dire que $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$ est une décomposition *topologique* de $[0,1]$.

On peut ainsi proposer la définition suivante : l'espace topologique X est **topologiquement décomposé** en deux parties non vides $A, B \subseteq X$ si :

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad A \cap \overline{B} = \varnothing, \quad B \cap \overline{A} = \varnothing \tag{5.1}$$

Les deux premières conditions disent que la décomposition est ensembliste, les deux dernières précisent que la décomposition est topologique : aucune des deux parties ne contient un point adhérent à l'autre. En fait, la condition (5.1) est équivalente à :

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ fermés non vides de } X \tag{5.2}$$

En effet : si (5.1) est vérifiée, alors $A \subseteq \overline{A} \subseteq X \backslash B = A$ et ainsi $A = \overline{A}$ et donc A est fermé, et de même pour B. Réciproquement, (5.2) implique (5.1) puisque $A \cap B = \varnothing$ s'écrit aussi $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$ lorsque A et B sont fermés.

Mais dire qu'il existe des parties A et B vérifiant (5.2) revient à dire qu'il existe une partie A qui est non vide et différente de X, et qui est à la fois ouverte et fermée. Nous sommes arrivés à la définition classique de la connexité.

5.1 Espaces topologiques connexes

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **connexe** si X et $\varnothing$ sont les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées dans X. Une partie A de X est dite **connexe** si elle est connexe en tant qu'espace topologique pour la topologie induite.

⚠ Comme on l'a vu dans l'introduction :

$(X, \mathcal{O})$ est connexe $\Leftrightarrow$ il n'existe pas d'ouverts disjoints non vides U, V tels que $X = U \cup V$
$\Leftrightarrow$ il n'existe pas de fermés disjoints non vides F, G tels que $X = F \cup G$

Exemples

1. L'ensemble vide est connexe !
2. Un singleton est connexe.
3. Un espace topologique discret n'est pas connexe dès qu'il contient plus de deux éléments. Par exemple si $X = \{a, b\}$ avec la topologie discrète et $a \neq b$, alors $X = \{a\} \cup \{b\}$ est une décomposition en deux ouverts disjoints non vides.
4. Les espaces $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ usuels ne sont pas connexes : leur topologie est discrète.
5. L'espace $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas connexe. Par exemple :
$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[) \cup (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[)$$
est une décomposition de $\mathbb{Q}$ en deux ouverts disjoints non vides.
6. $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, car $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est une décomposition en deux ouverts non vides disjoints.

Proposition. *Soient X et Y des espaces topologiques homéomorphes. Alors X est connexe si et seulement si Y est connexe.*

Démonstration. ✎ Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Si Y n'est pas connexe, c'est qu'il existe deux ouverts V, V' de Y, disjoints non vides, tels que $Y = V \cup V'$. Alors $U := f^{-1}(V)$ et $U' := f^{-1}(V')$ sont des ouverts de X car f est continue, ils ne sont pas vides car f est surjective, ils sont disjoints car V et V' le sont, et $X = U \cup U'$ car $Y = V \cup V'$. Donc X n'est pas connexe. De même dans l'autre sens, en utilisant la réciproque f^{-1}. □

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ On va voir que $\mathbb{R}$ usuel est connexe, et que ses parties connexes sont les intervalles.

Proposition. *L'espace $\mathbb{R}$ usuel est connexe.*

Démonstration. ✎ Soient A, B deux fermés non vides tels que $A \cup B = \mathbb{R}$. Il s'agit donc de montrer que $A \cap B$ n'est pas vide.

1. Comme A et B sont supposés non vides, on peut choisir $a \in A$ et $b \in B$. Quitte à échanger les rôles de A et B, on suppose que $a \leqslant b$. L'idée est maintenant d'aller trouver le plus grand élément de A contenu dans $[a, b]$ et de montrer qu'il appartient aussi à B. On aura alors un élément de $A \cap B$, qui sera ainsi non vide.
2. Considérons donc $A \cap [a, b]$: il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et majorée (par b). Donc elle admet une borne supérieure m, qui forcément appartient à l'adhérence de A, donc qui appartient à A (supposé fermé). Ainsi en fait m est le plus grand élément de $A \cap [a, b]$.

3. Si $m = b$, on a obtenu ce qu'on voulait : m appartient à A et à B, donc $A \cap B$ n'est pas vide
4. Si m est strictement inférieur à b, alors $]m, b] \cap A = \varnothing$ puisque m est le plus grand élément de $A \cap [a, b]$. Donc $]m, b] \subseteq B$, puisque $A \cup B = \mathbb{R}$. Et donc, comme plus haut, m appartient à l'adhérence de B, donc appartient à B (supposé fermé). Donc là encore m appartient à A et à B, donc $A \cap B$ n'est pas vide

□

En fait, le même raisonnement fonctionne pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$:

Proposition. *Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

Démonstration. On raisonne exactement de la même manière, en remplaçant $\mathbb{R}$ par un intervalle I (que l'on peut supposer non vide sinon il n'y a rien à faire). □

Proposition. *Les intervalles sont les seuls connexes de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Il existe donc $a < b < c$ tels que $a, c \in A$ et $b \notin A$. Alors $A = (A \cap]-\infty, c[) \cap (A \cap]c, +\infty[)$ est une décomposition de A en deux ouverts disjoints non vides, donc A n'est pas connexe. □

Applications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$ Dans cette section, $\{0, 1\}$ est muni de sa topologie discrète. Ses ouverts sont donc $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$. On peut aussi voir $\{0, 1\}$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ avec sa distance usuelle.

Soit X un espace topologique. A quelle condition une application $f : X \to \{0, 1\}$ est-elle continue ? Dire que f est continue, c'est dire que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ouvert de X. Mais $\{0, 1\}$ ne possède que quatre ouverts, et clairement $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ sont des ouverts de X, donc la seule contrainte est que $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ soient des ouverts de X. Or évidemment $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des parties de X qui sont disjointes et leur réunion est X tout entier. On sent qu'il y a un rapport avec la connexité de X...

Proposition. *Soit X un espace topologique. Alors X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Par double implication.

1. $\Rightarrow$ On suppose X connexe et on se donne $f : X \to \{0, 1\}$ continue. Comme on vient de le voir, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont alors deux ouverts disjoints de X sont la réunion est X. Par connexité, l'un des deux doit être vide. Si $f^{-1}(0) = \varnothing$, alors $X = f^{-1}(1)$ et donc f est constante égale à 1. De même, si $f^{-1}(1) = \varnothing$ alors f est constante égale à 0.
2. $\Leftarrow$ Par contraposée. On suppose que X n'est pas connexe, il existe donc deux ouverts A, B de X disjoints non vides tels que $A \cup B = X$. Définissons alors $f : X \to \{0, 1\}$ en posant $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$. Cette application est bien définie puisque $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = X$. De plus f est continue puisque $f^{-1}(0) = A$ et $f^{-1}(1) = B$ sont des ouverts de X. De plus f n'est pas constante, puisque A et B ne sont pas vides.

$\square$

Propriétés de la connexité La caractérisation de la connexité en termes d'applications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$ est souvent très facile à utiliser dans les démonstrations.

Proposition. *Soit X un espace topologique.*

1. *Si A, B sont deux parties connexes de X telles que $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cup B$ est une partie connexe de X.*
2. *Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes de X telle que $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est une partie connexe de X.*
3. *Si A, B sont deux parties de X telles que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ et si A est connexe, alors B est connexe.*
4. *Si A est une partie connexe de X, alors $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. 1. On suppose que A et B sont connexes et que $A \cap B \neq \varnothing$, et on considère $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Alors les restrictions $f_{\restriction A} : A \to \{0, 1\}$ et $f_{\restriction B} : B \to \{0, 1\}$ sont également continues. Par connexité, ces deux restrictions sont constantes. Et comme $A \cap B$ n'est pas vide, ces deux constantes sont les mêmes. Donc f est constante.

2. Généralisation directe.
3. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ continue. Alors la restriction $f_{\restriction A} : A \to \{0, 1\}$ est continue, donc constante par connexité. Supposons par exemple que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$, et soit $b \in B$. Montrons que nécessairement $f(b) = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si $f(b) = 1$, alors b appartient à $f^{-1}(1)$ qui est un ouvert de B, donc qui peut s'écrire $f^{-1}(1) = B \cap U$ avec U ouvert de X. Ainsi U est un voisinage de b dans X, et B est contenu dans l'adhérence de A, donc U doit contenir un point $a \in A$. Mais $A \subseteq B$, donc $a \in B$, donc $a \in B \cap U$, d'où à la fois $f(a) = 1$ et $f(a) = 0$, ce qui est la contradiction voulue. Donc $f : B \to \{0, 1\}$ est bien constante.
4. C'est un cas particulier du point précédent : prendre $B := \overline{A}$.

$\square$

Proposition. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\alpha : f(X) \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors $\alpha \circ f : X \to \{0, 1\}$ est composée d'applications continues, donc est continue. Par connexité de X, elle est constante. Donc α est constante. $\square$

Dans la démonstration qui précède, on a utilisé le fait que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors la « restriction au but » $X \to f(X)$ est également continue, où $f(X)$ est muni de la topologie induite comme sous-espace de Y.

Corollaire. *Soient X, Y deux espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application continue et soit $A \subseteq X$. Si A est une partie connexe de X, alors $f(A)$ est une partie connexe de Y.*

Démonstration. Il suffit de considérer la restriction $f_{\restriction A} : A \to Y$, qui est encore continue, et d'appliquer la proposition précédente. □

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. *(théorème des valeurs intermédiaires) Soit X un espace topologique connexe, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Soient $a, b \in X$. Alors pour tout réel $k \in [f(a), f(b)]$, il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = k$.*

Démonstration. D'après la proposition 5.1, $f(X)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Donc c'est un intervalle ! Or $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f(X)$, donc tout réel $k \in [f(a), f(b)]$ appartient également à $f(X)$, donc est de la forme $k = f(x)$ pour un certain $x \in X$. □

Exemple 8. On note S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel. L'application $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue, son image est S^1 et son domaine de définition est connexe. Donc S^1 est connexe.

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective $S^1 \to \mathbb{R}$.

Produit d'espaces connexes

Proposition. *Soient X et Y des espaces topologiques connexes. Alors $X \times Y$ est connexe (pour la topologie produit).*

Démonstration. Si X ou Y est vide, alors $X \times Y$ est vide aussi et donc est bien connexe. On peut donc supposer que X et Y sont tous deux non vides, et on choisit un point $x_0 \in X$ et un point $y_0 \in Y$. Soit $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ continue. On va montrer que $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

- La restriction de f à $X \times \{y\}$ est continue. Or $X \times \{y\}$ est homéomorphe à X donc est connexe, donc $f_{\restriction X \times \{y\}}$ est constante, donc $f(x, y) = f(x_0, y)$.
- La restriction de f à $\{x_0\} \times Y$ est continue, or $\{x_0\} \times Y$ est homéomorphe à Y donc est connexe, donc $f_{\restriction \{x_0\} \times Y}$ est constante, donc $f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.
- Ainsi $f(x, y) = f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ comme on voulait montrer.

□

Plus généralement, on démontre de même que le produit d'un nombre fini d'espaces est connexe si et seulement si chacun des facteurs est connexe.

Corollaire 10. $\mathbb{R}^n$ *est connexe pour tout* $n \geqslant 2$.

5.2 Composantes connexes

Lorsqu'un espace topologique n'est pas connexe, on peut le décomposer en plusieurs « morceaux » connexes, que l'on appelle ses composantes connexes. Par exemple, muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}$, l'espace $X = [0, 1] \cup [3, 4[\cup \{4\}$ possède trois composantes connexes.

Soit X un espace topologique. Pour chaque $x \in X$, notons C_x la réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent x. Remarquons tout d'abord que C_x n'est pas vide puisque $\{x\}$ est connexe (singleton) et contient x ; donc $x \in C_x$. De plus C_x est connexe d'après la proposition 5.1 puisque c'est la réunion d'une famille de connexes dont l'intersection n'est pas vide.

Proposition. *Avec les notations précédentes :*

1. *C_x est la plus grande partie connexe de X qui contient x.*
2. *C_x est fermé dans X.*
3. *Si $x, y \in X$, alors ou bien $C_x = C_y$ ou bien $C_x \cap C_y = \varnothing$.*

Démonstration.

1. Par définition, C_x contient tout connexe auquel x appartient. Or on vient de voir que x appartient à C_x et que C_x est connexe. Donc C_x est bien le plus grand connexe contenant x.
2. L'adhérence $\overline{C_x}$ contient x et est connexe, donc $\overline{C_x} \subseteq C_x$, donc $\overline{C_x} = C_x$ autrement dit C_x est fermé.
3. Si $C_x \cap C_y$ n'est pas vide, alors la réunion $C_x \cup C_y$ est encore connexe, or elle contient x et y, donc $C_x \cup C_y \subseteq C_x$ et $C_x \cup C_y \subseteq C_y$, d'où finalement $C_x = C_y$.

□

Définition 11. On dit que C_x est la **composante connexe** de x dans X.

⚠ Comme on vient de le voir, les composantes connexes forment une partition de X en sous-ensembles fermés.

Exemples

1. $X = [0,1] \cup [2,3[\cup \{4\}$ possède trois composantes connexes : $[0,1]$, $[2,3[$ et $\{4\}$.
2. Les composantes connexes d'un espace discret (par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) sont ses singletons.
3. Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont ses singletons.

5.3 Connexité par arcs

Soit X un espace topologique. Par définition, un chemin de X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. On dit que γ « va de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ ».

Définition. Un espace topologique X est **connexe par arcs** si deux points quelconques $x, y \in X$ peuvent être reliés par un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ au sens où $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Exemple. Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs. Plus généralement, toute partie convexe d'un evn est connexe par arcs. Encore plus généralement, toute partie étoilée d'un evn est connexe par arcs.

Proposition. *Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.*

Démonstration. On suppose que X est connexe par arcs. Soit $f : X \to \{0,1\}$ une application continue : on cherche à montrer qu'elle est constante. Pour cela, soient $x, y \in X$ quelconques. Il existe alors un chemin γ de x à y. Mais alors la composée $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, donc elle est constante par connexité de $[0,1]$. D'où $f(x) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(y)$, ce que l'on voulait montrer. □

⚠ La réciproque est fausse en général. Par exemple, on montre que

$$(\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x, \sin 1/x)\,;\, 0 < x \leqslant 1\}$$

est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 12. Montrer qu'un *ouvert* d'un espace vectoriel normé est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

6 Complétude

⚠ La complétude est une notion métrique. Dans tout le chapitre, on se placera donc dans un espace métrique (X, d).

6.1 Suites de Cauchy

Définition. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant N, d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

⚠ Deux distances fortement équivalentes donnent la même notion de suite de Cauchy (toute suite de Cauchy pour l'une est suite de Cauchy pour l'autre 🔧). Mais il existe des distances topologiquement équivalentes qui ne définissent pas les mêmes suites de Cauchy (voir feuille TD).

Proposition. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence, alors elle converge.*

Démonstration. ✏

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $a \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Si $n, p \geqslant N$, on a alors $d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, a) + d(a, x_p)$ par inégalité triangulaire, d'où $d(x_n, x_p) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc la suite est de Cauchy.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_p) < 1$ pour $n, p \geqslant N$. Donc $x_n \in B(x_N, 1)$ pour tout $n \geqslant N$. On en déduit 🔧 que la suite est bornée (même argument que pour montrer qu'une suite convergente est bornée).
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence $a \in X$, on va montrer qu'alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. Soit ϕ une extractrice telle que $x_{\phi(n)} \to a$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors d'une part

   $$\exists N_1 \in \mathbb{N}\,;\, \forall n, p \geqslant N_1, d(x_n, x_p) < \varepsilon/2$$

   et d'autre part

   $$\exists N_2 \in \mathbb{N}\,;\, \forall n \geqslant N_2, d(x_{\phi(n)}, a) < \varepsilon/2$$

Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant N$:

$$d(x_n, a) \leqslant d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(on a utilisé le fait que $\phi(n) \geqslant n$ pour une extractrice). Donc $x_n \to a$ quand $n \to +\infty$ comme voulu.

□

Remarque. Certains espaces métriques possèdent des suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes, par exemple $\mathbb{Q}$.

Corollaire. *Dans un espace métrique compact, toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Dans un espace compact, toute suite admet une valeur d'adhérence. Donc toute suite de Cauchy converge. □

Comme « être une suite de Cauchy » est une notion *métrique*, elle n'est pas nécessairement préservée par les fonctions continues (voir feuille TD). Mais elle l'est si on renforce l'hypothèse de continuité en faisant intervenir les distances...

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme :

$$\exists \delta > 0\,;\ \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Et comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n, p \geqslant N, d_X(x_n, x_p) < \delta$$

On en déduit que $d_Y(f(x_n), f(x_p)) < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

6.2 Espaces métriques complets

Définition. Un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy de points de X est convergente. Une partie $A \subseteq X$ est une **partie complète** de X si (A, d_A) est complet.

Si d et d' sont deux distances fortement équivalentes, alors (X, d) est complet si et seulement si (X, d') est complet (voir plus haut).

Théorème. $\mathbb{R}$ *est complet (pour sa distance usuelle).*

Démonstration. Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est bornée, donc admet une sous-suite convergente (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$), donc converge. □

Exemple. (espaces complets et non complets)

1. Tout espace métrique discret est complet.
2. $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas complet.

Proposition. *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Toute suite de Cauchy possède une valeur d'adhérente (compacité séquentielle), donc elle converge (voir plus haut). □

On retrouve pour la complétude un énoncé semblable à celui pour la compacité :

Proposition. *Soit X un espace métrique, et soit $A \subseteq X$.*

1. *Si A est une partie complète de X, alors A est fermée dans X.*
2. *Si X est complet et si A est fermée dans X, alors A est complète.*

Démonstration.

1. On suppose que A est complète. On utilise la caractérisation séquentielle de « être fermé dans X ». Pour cela, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge dans X vers un point $x \in X$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est une suite de Cauchy de points de X. Donc c'est aussi une suite de Cauchy de points de A, qui est muni de la distance induite d_A. Or (A, d_A) est complet, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A. Mais comme elle converge déjà dans X vers $x \in X$, c'est que le point x appartient à A par unicité de la limite. Donc A est séquentiellement fermée, donc fermée, dans X.
2. On suppose X complet et A fermée dans X. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de A. C'est donc aussi une suite de Cauchy de X puisque d_A et d_X coïncident sur A. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X (qui est complet). Or A est fermée dans X, donc la limite doit appartenir à A. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A. Donc A est complète.

□

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques non vides. Alors l'espace produit $X \times Y$ est complet (pour les distances d_∞, d_1, d_2) si et seulement si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets.*

⚠ Pourquoi supposer que X et Y ne sont pas vides ? Parce que si par exemple $Y = \varnothing$, alors $X \times Y$ est vide et donc automatiquement complet, alors que X ne l'est peut-être pas.

Démonstration. Par double implication. On utilise la propriété fondamentale de convergence des suites dans un produit (voir chapitre « Espaces topologiques »).

1. Sens $\Rightarrow$. On suppose $X \times Y$ complet et on montre que X est complet (et de même pour Y). Pour cela, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. On prend un point quelconque $b \in Y$. Alors $(x_n, b)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(X \times Y, d_\infty)$ car

$$d_\infty((x_n, b), (x_p, b)) = \max(d_X(x_n, x_p), d_Y(b, b)) = d_X(x_n, x_p)$$

   Donc $(x_n, b)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X \times Y$, et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X.

2. Sens $\Leftarrow$. On suppose X et Y complets et on montre que $X \times Y$ est complet pour d_∞. Pour cela, soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $X \times Y$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y, car :

$$\begin{cases} 0 \leqslant d_X(x_n, x_p) \leqslant d_\infty((x_n, y_n), (x_p, y_p)) \\ 0 \leqslant d_Y(y_n, y_p) \leqslant d_\infty((x_n, y_n), (x_p, y_p)) \end{cases}$$

   Par hypothèse de complétude, ces deux suites convergent (respectivement dans X et dans Y). Donc $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X \times Y$ pour d_∞.

$\square$

Généralisation immédiate à un produit fini : un produit fini d'espaces métriques est complet si et seulement si chacun des espaces métriques est complet.

Corollaire. *L'espace $\mathbb{R}^n$ est complet (pour les distances usuelles d_∞, d_1, d_2).*

6.3 Fermés emboîtés : théorème de Cantor

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique. Il y a équivalence entre :*

1. *(X, d) est complet.*
2. *Toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 possède une intersection non vide.*

Remarque. Dans le point 2, l'intersection de la suite de fermés est en fait un singleton (puisque le diamètre des fermés tend vers 0).

Démonstration. Sens $\Rightarrow$: . On suppose que (X, d) est complet et on se donne une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides telle que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

1. On choisit un point x_n dans chaque F_n (non vide, par hypothèse).
2. On affirme alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$.
   a) Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ (les diamètres tendent vers 0 par hypothèse).
   b) Pour $n, p \geqslant N$, on a $x_n, x_p \in F_N$ car la suite de fermés est décroissante par hypothèse (donc $F_n \subseteq F_N$ et $F_p \subseteq F_N$).
   c) Donc $d(x_n, x_p) \leqslant \mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$, comme voulu.

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X supposé complet, donc elle converge. Notons $a := \lim_{n\to+\infty} x_n$.
   a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $x_p \in F_n$ pour tout $p \geqslant n$ (décroissance de la suite de fermés), donc le point a est limite d'une suite de points de F_n, donc a appartient à F_n qui est fermé par hypothèse.
   b) Ainsi $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, et donc cette intersection n'est pas vide.

□

Démonstration. Sens $\Leftarrow$: On suppose que la condition 2 est vérifiée, et on veut montrer que (X, d) est complet. Pour cela, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. On se rappelle que pour montrer qu'elle converge, il suffit de prouver qu'elle possède une valeur d'adhérence.

1. Chaque $F_n := \overline{\{x_p\,;\, p \geqslant n\}}$ est un fermé non vide de X.
2. De plus $F_{n+1} \subseteq F_n$ pour tout n.
3. Le diamètre de F_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En effet, soit $\varepsilon > 0$.
   a) Comme la suite est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_p) < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$.
   b) Ainsi $\operatorname{diam}\{x_p\,;\, p \geqslant n\} \leqslant \varepsilon$ (inégalité large par passage à la borne supérieure).
   c) Et donc $\operatorname{diam}(F_n) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, car $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$ pour toute partie A d'un espace métrique.
4. Par hypothèse, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide. Or on sait que cette intersection est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc la suite possède une valeur d'adhérence, donc elle converge (voir le début de la preuve).

□

Importance des hypothèses ⚠ Pour pouvoir conclure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ n'est pas vide (sens $1 \Rightarrow 2$), toutes les hypothèses sont importantes :

1. La conclusion peut être fausse si X n'est pas complet. Par exemple en prenant $X = \mathbb{Q}$ usuel (non complet), soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de rationnels telle que $a_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de rationnels telle que $b_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ est une intersection décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, mais cette intersection est vide (dans $\mathbb{Q}$!)
2. La conclusion peut être fausse si les F_n ne sont pas fermés. Par exemple dans $\mathbb{R}$ usuel, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1[= \varnothing$.
3. La conclusion peut être fausse si le diamètre ne tend pas vers 0. Par exemple dans $\mathbb{R}$ (complet) on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[= \varnothing$.
4. Enfin, la conclusion est évidemment fausse si l'un des F_n est vide.

6.4 Lien entre complétude et compacité

On a vu plus haut que « compact $\Rightarrow$ complet », et on sait que la réciproque est fausse (par exemple $\mathbb{R}$ usuel est complet non compact). Que peut-on ajouter à « complet » pour obtenir « compact » ?

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si X est complet et précompact.*

Démonstration. On a déjà vu le sens $\Rightarrow$, il s'agit de montrer le sens $\Leftarrow$. Pour cela, on suppose que (X, d) est précompact et complet. Pour montrer que X est compact, il suffit de montrer qu'il est séquentiellement compact (espace métrique). Pour cela, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X.

1. Par précompacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1. L'une de ces boules, disons B_1, doit contenir une infinité de termes de la suite.
2. Puis on recouvre X, et donc aussi B_1, par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. L'une de ces boules, disons B_2, doit donc contenir une infinité des termes de la suite qui sont contenus dans B_1, autrement dit $B_1 \cap B_2$ contient une infinité de termes de la suite.
3. On construit ainsi par récurrence une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de boules ouvertes B_k de rayon $1/k$ telles que $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_k\}$ soit infini quel que soit $k \geqslant 1$. Si $B_1, \ldots, B_k$ sont construites, on recouvre $B_1 \cap \cdots \cap B_k$ par un nombre fini de boules de rayon $1/(k+1)$, et l'une de ces boules, notée B_{k+1}, doit être telle que $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap B_{k+1}\}$ soit infini.
4. On peut alors extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{\phi(n)} \in B_1 \cap \cdots \cap B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Cette suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon/2$. Si $n, p \geqslant N$, alors $x_{\phi(n)}$ et $x_{\phi(p)}$ appartiennent à $B_1 \cap \cdots \cap B_N$ donc en particulier appartiennent à B_N qui est une boule de rayon $1/N$, d'où $d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(p)}) < 1/N + 1/N < \varepsilon$ par inégalité triangulaire.
6. Comme X est complet, cette suite de Cauchy doit converger. On a bien montré qu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Exemple : compacité du cube de Hilbert On note $H := [0,1]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\_in\mathbb{N}}$ de nombres appartenant à $[0, 1]$. Pour $x, y \in H$, on pose :

$$d(x, y) := \sum_{n\geqslant} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

On montre facilement que d est une distance sur H. L'espace métrique (H, d) est appelé le « cube de Hilbert ».

1. Montrer que H est précompact.
2. Montrer que H est complet.

On en déduit que H est compact. □

6.5 Exemple important d'espace complet

Soit X un ensemble quelconque. On rappelle que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications bornés $f : X \to \mathbb{R}$. On le munit de la distance d_∞.

Théorème. *L'espace* $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$. Il s'agit de montrer qu'elle converge, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ bornée telle que $d_\infty(f_n, f) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Nous allons d'abord montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, puis montrer que f est bornée et que la convergence est uniforme.

1. Pour chaque $x \in X$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
   a) Il existe alors un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$.
   b) Or $0 \leqslant |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant d_\infty(f_n, f_p)$.
   c) Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$.
2. ⚠ Or $\mathbb{R}$ est complet. Donc pour chaque $x \in X$ la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Notons $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ sa limite. On « réunit » toutes ces limites pour former une fonction $f : X \to \mathbb{R}$.
3. On montre simultanément que f est bornée et que f_n converge uniformément vers f. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. On choisit un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$.
   a) Fixons pour le moment $x \in X$. Pour $n, p \geqslant N$, on a donc $|f_n(x), f_p(x)| < \varepsilon$. En faisant tendre p vers l'infini (avec n fixé) on obtient $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   b) On vient donc de montrer que :
   $$\forall n \geqslant N, \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{6.1}$$
   c) On en déduit d'une part que $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée, car par exemple pour $n = N$:
   $$0 \leqslant |f(x)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leqslant \varepsilon + \|f_N(x)\|_\infty \tag{6.2}$$
   d) On en déduit d'autre part que, pour $n \geqslant N$:
   $$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \tag{6.3}$$
   e) Ainsi f appartient à $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ et
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geqslant N, d_\infty(f_n, f) \leqslant \varepsilon \tag{6.4}$$
   ce qui prouve ce que l'on voulait montrer.

□

Supposons maintenant que (X, d) est un espace métrique compact. On sait que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée (et atteint ses bornes). Donc $C^0(X, \mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors $C^0(X, \mathbb{R})$ est fermé dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$.*

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle : on se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues, on suppose que $f_n \to f$ dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$, et il s'agit de montrer que f est continue. Pour cela, soit $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_n, f) \leqslant \varepsilon/3$ pour tout $n \geqslant N$. D'autre part f_N est continue en a, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, d_X(x, a) < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$$

Pour $d_X(x, a) < \delta$, on a donc :

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon$$

On a ainsi démontré que f est continue en a, et cela quel que soit $a \in X$. Donc f est continue. □

Corollaire. *L'espace métrique $(C^0(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ est complet.*

Démonstration. $C^0(X, \mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ qui est complet. □

6.6 Théorème du point fixe de Banach

Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle qu'une application $f : X \to X$ est **contractante** s'il existe un $k \in \,]0, 1[$ tel que :

$$\forall x, x' \in X, \; d(f(x), f(x')) \leqslant k d(x, x')$$

Autrement dit, on demande à f d'être k-lipschitzienne avec k strictement inférieur à 1.

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors toute application contractante $f : X \to X$ admet un unique point fixe.*

Démonstration. Unicité puis existence.

1. **Unicité.** Supposons que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y)$. Donc $(1 - k)d(x, y) = 0$. Or $0 < k < 1$, donc $d(x, y) = 0$, d'où $x = y$.
2. **Existence.** Soit $x_0 \in X$ n'importe quel point de X. L'idée est de considérer les images successives de x_0 par f. On pose donc $x_n := f^n(x_0)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ composée n fois. On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc une suite convergente puisque X est complet, et que sa limite est point fixe de f.

a) D'abord on commence par estimer la distance entre deux termes consécutifs :

$$\forall n \geqslant 1,\ d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant k d(x_n, x_{n-1})$$

d'où on déduit par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1,\ d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$$

b) Puis on estime la distance entre deux termes quelconques. Si $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqslant k^n d(x_1, x_0) + \cdots + k^{n+p-1} d(x_1, x_0) \\ &\leqslant k^n d(x_1, x_0)[1 + k + \cdots + k^{p-1}] \\ &= \frac{1-k^p}{1-k} k^n d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{1}{1-k} k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

⚠ Or $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, car $0 < k < 1$. De plus $d(x_1, x_0)/(1-k)$ est une constante. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$ quels que soient $n \geqslant N$ et $p \geqslant 1$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy. Comme X est complet, il existe $a \in X$ tel que $x_n \to a$.

c) L'application f est lipschitzienne donc continue, et $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, donc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Or $f(x_n) = x_{n+1}$ par définition. Donc $f(a) = a$ par unicité de la limite (espace métrique). Ainsi la limite a est un point fixe de f.

□

Exemples et applications

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité des solutions d'une équation différentielle (voir cours de Calcul Différentiel au S6).
2. Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue fixée. Il existe alors une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t) dt \qquad \forall x \in [0,1]$$

Pour le voir, raisonner dans l'espace $X := C^0([0,1], \mathbb{R})$.

6.7 Prolongement des applications uniformément continues

Théorème. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On se donne une application $f : A \to Y$ définie sur une partie $A \subseteq X$. On suppose que :*

1. A est dense dans X ;

2. Y est complet ;

3. f est uniformément continue.

Alors il existe une unique application continue $F : X \to Y$ telle que $F_{\restriction A} = f$. De plus, F est uniformément continue.

La démonstration est difficile par sa longueur et le nombre d'étapes, mais chaque étape est relativement simple.

Démonstration. Unicité puis existence.

1. Unicité. Soient $F, G : X \to Y$ deux prolongements continus de f, et soit $x \in X$. Par densité de A, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $a_n \to x$ dans X. Par continuité de F et G, on doit donc avoir $F(a_n) \to F(x)$ et $G(a_n) \to G(x)$. Or $F(a_n) = G(a_n) = f(a_n)$ pour tout n, puisque F et G sont des prolongements de f. D'où $F(x) = G(x)$ par unicité de la limite (espace métrique). Donc $F = G$.
2. Existence. Il faut arriver à définir $F(x)$ pour $x \in X\backslash A$. Pour cela, l'idée est évidemment d'approcher x par des points de A (par densité) et de définir $F(x)$ comme la « limite » des valeurs de $f(a)$ lorsque a s'approche de x. Voici les détails :
   a) Soit $x \in X$. Par densité de A, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A telle que $a_n \to x$ dans X. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc elle est de Cauchy dans (X, d_X). Or $f : X \to Y$ est uniformément continue, donc la suite image $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy dans (Y, d_Y). Mais (Y, d_Y) est supposé complet, donc cette suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger dans Y.

   b) On affirme que la limite de $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on vient de trouver ne dépend que de x, et non de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. En effet, si $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de points de A qui converge vers x, alors la suite $(a_0, a'_0, a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n, \dots)$ est une suite de points de A qui converge vers x, donc la suite de ses images doit converger vers un certain point de Y. Ce point est alors la limite des deux suites extraites $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux suites ont donc bien la même limite.

   c) Avec les notations qui précèdent, on pose $F(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de points de A convergeant vers x. On obtient ainsi une application $F : X \to Y$.

   d) Cette application F prolonge f. En effet, si $a \in A$, alors la suite constante $(a, a, \dots)$ converge vers a, donc $F(a) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a)$ par définition.

   e) L'application F est uniformément continue. Pour le montrer, soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe alors $\delta > 0$ tel que

   $$\forall a, a' \in A, d_X(a, a') < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon/3$$

   Soient $x, x' \in X$ tels que $d_X(x, x') < \delta/3$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de A telles que $a_n \to x$ et $a'_n \to x'$. On sait qu'alors $f(a_n) \to F(x)$ et $f(a'_n) \to F(x')$.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de suites en jeu (quatre suites), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait à la fois $d_X(a_n, x) < \delta/3$ et $d_X(a'_n, x') < \delta/3$ et $d_Y(f(a_n), F(x)) < \varepsilon/3$ et $d_Y(f(a'_n), F(x')) < \varepsilon/3$. Par inégalité triangulaire, on obtient alors :

$$\begin{aligned} d_Y(F(x), F(x')) &\leqslant d_Y(F(x), f(a_n)) + d_Y(f(a_n), f(a'_n)) + d_Y(f(a'_n), F(x')) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

On vient bien de montrer la continuité uniforme : pour tout $\varepsilon < 0$, il existe un $\delta' > 0$ (prendre $\delta' := \delta/3$) tel que, quels que soient $x, x' \in X$:

$$d_X(x, x') < \delta' \Rightarrow d_Y(F(x), F(x')) < \varepsilon$$

□

Exemples

Ce théorème de prolongement est souvent utilisé en analyse fonctionnelle.

6.8 Complétion d'un espace métrique

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique non complet. Il existe alors un espace métrique complet $(\tilde{X}, \tilde{d})$ et une application $\phi : X \to \tilde{X}$ préservant les distances tels que $\phi(X)$ soit dense dans $\tilde{X}$.*

Remarque. On montre assez facilement que le complété $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est « unique à isomorphisme près » au sens où si (Y, δ) et $\psi : X \to Y$ ont les mêmes propriétés, alors il existe une unique isométrie $u : \tilde{X} \to Y$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, dotted, "u"] \\ X \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\psi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la distance d_∞. On fixe un point $x_0 \in X$, et pour chaque $a \in X$ on définit $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ par :

$$\phi_a(x) := d(x, a) - d(x, x_0)$$

On vérifie que ϕ_a est bornée, ce qui nous donne une application $\phi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ qui à $a \in X$ associe $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. On démontre que ϕ préserve les distances. On a ainsi construit une application préservant les distances de X dans un espace métrique complet, mais il manque encore la densité de l'image. Pour l'obtenir, il suffit d'observer que $\overline{\phi(X)}$ est un sous-espace métrique fermé de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, donc il est complet. La restriction au but de ϕ à $\overline{\phi(X)}$ nous donne le résultat. □

Voici une autre démonstration de ce résultat.

Démonstration. Esquisse de la preuve :

1. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les suites de Cauchy de points de X. On définit sur $\mathcal{C}$ une relation d'équivalence : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $d_X(x_n, y_n) \to 0$. On note $\tilde{X}$ l'ensemble des classes d'équivalence.
2. On montre que si $\boldsymbol{x} = (x_n) \in$ et $\boldsymbol{y} = (y_n)$ appartiennent à $\mathcal{C}$, alors $(d_X(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels, donc une suite convergente, puis que la limite ne dépend que des classes d'équivalence de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Ceci nous permet de poser $\tilde{d}(u, v) := \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n)$ où $u, v \in \tilde{X}$ et $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ sont des représentants de u, v respectivement.
3. On montre que $\tilde{d}$ est une distance sur $\tilde{X}$.
4. On plonge X dans $\tilde{X}$ en associant à chaque $x \in X$ la classe d'équivalence $\phi(x)$ de la suite constante égale à x. Ceci définit une application $\phi : X \to \tilde{X}$, et on vérifie que $\tilde{d}(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y)$.
5. On montre que $\phi(X)$ est dense dans $\tilde{X}$. Pour cela, soit $u \in \tilde{X}$ dont on choisit un représentant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}$. Posons $u_n := \phi(x_n)$. On montre que $u_n \to u$ dans $\tilde{X}$ pour la distance $\tilde{d}$.
6. Finalement, on montre que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est complet. Pour cela, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\tilde{X}$. Par densité, pour chaque n on choisit $x_n \in X$ tel que $\tilde{d}(\phi(x_n), u_n) < 1/n$. On montre qu'alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X. Donc elle définit une classe $u \in \tilde{X}$, et on terminer en prouvant que $u_n \to u$.

$\square$

7 Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

Pour simplifier, on va se placer dans les espaces vectoriels normés réels, mais on pourrait plus généralement traiter le cas des espaces vectoriels complexes.

7.1 Espaces vectoriels normés

Rappels

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Une **norme** sur E est une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $N(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$, avec égalité si et seulement si $x = 0_E$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
3. $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in E$.

Les normes seront notées N ou $\|\cdot\|$. Un **espace vectoriel normé** (E, N) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme N.

On se rappelle qu'une norme $\|\cdot\|$ définit une distance en posant $d(x, y) := \|x - y\|$. Les espaces vectoriels normés sont donc des espaces métriques (très) particuliers.

Deux normes N et N' sur E sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x) \tag{7.1}$$

Si deux normes sont équivalentes, alors les distances associées sont fortement équivalentes.

Exemples d'evn

1. $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue, $\mathbb{C}$ avec le module
2. $E = \mathbb{K}^n$ peut être muni de plusieurs normes, en particulier :

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \\ \|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \end{aligned}$$

3. Si X est un ensemble quelconque, $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_\infty$.
4. Si X est un espace topologique compact, $E = C^0(X, \mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_\infty$.
5. $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ (non équivalentes).
6. Espaces de suites ℓ^∞, ℓ^1, ℓ^2.

Sous-espace vectoriel normé

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F hérite de la norme de E et devient lui-même un espace vectoriel normé.

Exemple. Soit X un espace topologique compact. Alors $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace normé de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Produit d'espaces normés

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On peut munir $E \times F$ de plusieurs normes naturellement associées à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, par exemple :

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_\infty &:= \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \\ \|(x,y)\|_1 &:= \|x\|_E + \|y\|_F \\ \|(x,y)\|_2 &:= \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ces trois normes sont équivalentes :

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_2 \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty$$

Normes équivalentes, topologies équivalentes

⚠ Dans les espaces métriques, on a vu deux notions différentes de « distances équivalentes » :
- — notion faible : deux distances d, d' sont équivalentes si elles définissent la même topologie (les mêmes ouverts) ;
- — notion forte : deux distances d, d' sont fortement équivalentes s'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha d \leqslant d' \leqslant \beta d$.

On pourrait s'attendre à retrouver cette distinction dans le cas des espaces vectoriels normés, mais ce n'est pas le cas :

Proposition. *Soit E un espace vectoriel, et soient N, N' deux normes sur E. Alors N et N' sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.*

Démonstration. ✎

1. Sens $\Rightarrow$. Déjà vu : si N et N' sont des normes équivalentes, alors les distances associées d et d' sont fortement équivalentes, donc topologiquement équivalentes et les topologies sont les mêmes.
2. Sens $\Leftarrow$. On suppose que N et N' définissent la même topologie.
   a) On sait que la N-boule ouverte $B_N(0_E, 1)$ est un ouvert pour N, donc c'est aussi un ouvert pour N'. Comme $0_E \in B_N(0_E, 1)$, il existe un $r > 0$ tel que $B_{N'}(0_E, r) \subseteq B_N(0_E, 1)$.
   b) Si $x \in E$ est non nul, alors $\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)}$ appartient à $B_{N'}(0_E, r)$; donc $\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)}$ appartient à $B_N(0_E, 1)$; donc $N(\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)}) = \frac{r}{2N'(x)}N(x) < 1$.

c) On vient donc de trouver une constante $\alpha := r/2$ telle que $N(x) < \alpha N'(x)$ pour tout $x \in E$ non nul. Pour le vecteur nul les normes sont nulles, donc finalement :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leqslant \alpha N'(x) \tag{7.3}$$

d) En échangeant les rôles de N et N', on démontre de même qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N'(x) \leqslant \beta N(x) \tag{7.4}$$

Donc les normes N et N' sont équivalentes.

□

Continuité des opérations

Proposition. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. La norme $N : E \to \mathbb{R}$, l'addition $E \times E \to E$ et la multiplication $\mathbb{R} \times E \to E$ sont continues.*

Démonstration.

1. La norme est 1-lipschitzienne donc continue :

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

(deuxième inégalité triangulaire pour une norme).

2. Si $(x_n, y_n) \to (x, y)$ dans $E \times E$, alors $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans E, et par conséquent :

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \\ &\leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \end{aligned}$$

Donc $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \to 0$ dans $\mathbb{R}$, donc $x_n + y_n \to x + y$ dans E. Ainsi l'addition est séquentiellement continue, donc continue.

3. De même : si $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x)$ dans $\mathbb{R} \times E$, alors $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{R}$ et $x_n \to x$ dans E, d'où :

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \\ &\leqslant |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \end{aligned}$$

On observe que le membre de droite tend vers 0 car $\|x_n - x\|$ et $|\lambda_n - \lambda|$ tendent vers 0 et $|\lambda_n|$ reste borné (car $\lambda_n \to \lambda$). Donc $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \to 0$ dans $\mathbb{R}$, donc $\lambda_n x_n \to \lambda x$ dans E. Ainsi la multiplication est séquentiellement continue, donc continue.

□

Proposition. *Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. On utilise par exemple la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soient $x, y \in \overline{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Alors $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$ par continuité des opérations. De plus $\alpha x_n + \beta y_n \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel. Donc $\alpha x + \beta y$ est limite d'une suite de points de F, donc appartient à $\overline{F}$. Ainsi $\overline{F}$ est stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Transfert de structure : image directe et réciproque d'une norme par un isomorphisme

Soient E et F deux espaces vectoriels isomorphes, et soit $\phi : E \to F$ un isomorphisme.

1. Si N_F est une norme sur F, alors $N_E := N_F \circ \phi$ est une norme sur E.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, dotted, "N_E:=N_F\circ\phi"'] & & F \arrow[dl, "N_F"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

2. Réciproquement, si N_E est une norme sur E, $N_F := N_E \circ \phi^{-1}$ est une norme sur F.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "N_E"'] & & F \arrow[dl, dotted, "N_F:=N_E\circ\phi^{-1}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Vérification directe de la définition d'une norme. Bien noter où on utilise la linéarité de ϕ et le fait que ϕ soit bijective. □

⚠ Dans les deux cas, l'application ϕ, qui n'était au départ qu'un isomorphisme, devient automatiquement une *isométrie*. En particulier, elle est continue.

Exemple. Supposons que E soit un espace vectoriel de dimension finie n. Alors tout choix de base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & E \\ x & \longmapsto & x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \end{array}$$

Par conséquent, toute norme N_E sur E peut être « tirée en arrière » par ϕ pour donner une norme N sur $\mathbb{R}^n$, en posant $N(x_1, \ldots, x_n) := N_E(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$. On obtient alors une isométrie $\phi : (\mathbb{R}^n, N) \to (E, N_E)$.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On sait déjà que ce résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ (voir le chapitre Compacité). Si N_E et N'_E sont deux normes sur E de dimension finie, et si $\phi : \mathbb{R}^n \to E$ est un isomorphisme (via le choix d'une base de E), alors $N := N_E \circ \phi$ et $N' := N'_E \circ \phi$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, donc elles sont équivalentes : il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha N(x_1, \dots, x_n) \leqslant N'(x_1, \dots, x_n) \leqslant \beta N(x_1, \dots, x_n)$$

On en déduit que N et N' sont équivalentes : pour tout $v \in E$, on a

$$\alpha N(\phi^{-1}(v)) \leqslant N'(\phi^{-1}(v)) \leqslant \beta N(\phi^{-1}(v))$$

autrement dit

$$\alpha N_E(v) \leqslant N'_E(v) \leqslant \beta N_E(v)$$

□

Proposition. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors :*

1. *E est complet.*
2. *Les parties compactes de E sont exactement les parties fermées et bornées (pour la norme en question).*
3. *Toute suite bornée (pour la norme) de points de E admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. On sait que le résultat est vrai pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il est donc vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme, car elles sont toutes équivalentes :

1. Des normes équivalentes définissent la même topologie, donc les mêmes suites convergentes, les mêmes parties fermées, les mêmes parties compactes.
2. Des normes équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy.
3. Des normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées, les mêmes suites bornées. Par exemple si $\alpha N \leqslant N' \leqslant \beta N$ est une partie bornée pour N, alors il existe un $R > 0$ tel que $A \subseteq B(0_{\mathbb{R}^n}, R)$, d'où on déduit $A \subseteq B(0_{\mathbb{R}^n}, R')$ en posant $R' =???$.

On en déduit le résultat pour un espace normé (E, N_E) de dimension finie en utilisant un isomorphisme $\phi : \mathbb{R}^n \to E$. Si $N := N_E \circ \phi$ est la norme sur $\mathbb{R}^n$ que l'on obtient en tirant N en arrière par ϕ, on obtient une isométrie $\phi : (\mathbb{R}^n, N) \to (E, N_E)$ et on voit facilement que :

1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de (E, N) est convergente (respectivement bornée, respectivement de Cauchy) si et seulement si la suite $(\phi^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (respectivement bornée, respectivement de Cauchy) dans $(\mathbb{R}_n, N)$.
2. Une partie $A \subseteq E$ est bornée (respectivement fermée, respectivement compacte) pour N_E si et seulement si $\phi^{-1}(A)$ est bornée (respectivement fermée, respectivement compacte) pour N.

Par exemple, pour une partie $A \subseteq E$:

$$\begin{aligned} A \text{ partie compacte de } E &\Leftrightarrow \phi(A) \text{ partie compacte de } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \phi(A) \text{ fermée et bornée dans } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A = \phi(\phi^{-1}(A)) \text{ fermée et bornée dans } E \end{aligned}$$

De même pour les autres propriétés annoncées. □

Théorème. *(Riesz) La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Dans le sens $\Leftarrow$, c'est un cas particulier du résultat précédent : la boule unité fermée est fermée et bornée. Pour le sens $\Rightarrow$, supposons que $D(0_E, 1)$ est compacte et montrons qu'alors E est de dimension finie. □

Séries convergentes dans un espace vectoriel normé

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace normé E. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ **converge** vers $a \in E$ si $\sum_{k=0}^{n} x_k$ tend vers a, au sens de la norme N, lorsque $n \to +\infty$.

7.2 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On s'intéresse naturellement aux applications $E \to F$ qui sont à la fois linéaires et continues.

Proposition. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre :*

1. *u est continue.*
2. *u est continue en 0_E.*
3. *Il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. On montre $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Si u est continue, alors en particulier elle est continue en 0_E.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si u est continue en 0_E, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\ \|x\|_E < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_F < \varepsilon.$$

En particulier, il existe un $\delta > 0$ correspondant à $\varepsilon = 1$. On montre que $M := 2/\delta$ convient. En effet, si $x \in E$:

— ou bien $x = 0_E$, et alors $\|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ car tout est nul ;

— ou bien $x \neq 0_E$, et alors la norme de $\frac{\delta x}{2\|x\|_E}$ est égale à $\delta/2$, donc strictement inférieure à δ, d'où $\|u(\frac{\delta x}{2\|x\|_E})\|_F < 1$, c'est-à-dire $\|u(x)\|_F < \frac{2}{\delta}\|x\|_E$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Si u vérifie la condition, alors elle est M-lipschitzienne :

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x - y)\|_F \leqslant \|x - y\|_E.$$

Donc u est continue.

□

Exemples

1. Sur $E = \mathbb{R}[X]$ on considère la norme $\|a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\| := \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$. On montre facilement qu'il s'agit bien d'une norme, notée $\|\cdot\|_\infty$ comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ (mais attention : ici n n'est pas fixé, c'est le degré du polynôme P dont on prend la norme). L'opérateur de dérivation $\Delta : E \to E$ qui à P associe $\Delta(P) := P'$ est linéaire. Est-il continu ? Non, car pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\|X^n\|_\infty = 1$ tandis que $\|\Delta(X^n)\|_\infty = \|nX^{n-1}\|_\infty = n$. Il n'existe donc pas de constante $M \geqslant 0$ telle que $\|\Delta(P)\|_\infty \leqslant M\|P\|_\infty$.
2. On considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et on s'intéresse à l'application $u : E \to E$ définie par $u(f)(x) := \int_0^x tf(t)dt$, clairement linéaire. Est-elle continue ? Oui, car quels que soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a $|u(f)(x)| = |\int_0^x tf(t)dt| \leqslant \int_0^x t|f(t)|dt \leqslant \|f\|_\infty \int_0^x tdt = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, d'où on déduit $\|u(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. On a donc trouvé une constante $M = 1/2$ qui convient.

Notation. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaire *continues* de E dans F.

Comme souvent, le cas de la dimension finie est particulier :

Proposition. *Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires $f : E \to F$ sont continues.*

Démonstration. Comme E est de dimension finie, toute ses normes sont équivalentes. Pour démontrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue, on peut donc remplacer la norme donnée sur E par n'importe quelle autre norme sur E. On choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, tout vecteur x de E se décompose donc de manière unique en $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Avec cette notation, on a vu plus haut que $N_E(x) := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ définit une norme sur E. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_F &= \|u(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|_F \\
&= \|x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n)\|_F \\
&\leqslant |x_1|\|u(e_1)\|_F + \cdots + |x_n|\|u(e_n)\|_F \\
&\leqslant \big(\|u(e_1)\|_F + \cdots + \|u(e_n)\|_F\big) N_E(x).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante M telle que $\|u(x)\|_F \leqslant M\, N_E(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que u est continue. $\square$

Norme d'une application linéaire continue

Soit $u : E \to F$ linéaire continue. On vient de voir qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que $\|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Pour $x \neq 0_E$, on a donc $\|u(x)\|_F / \|x\|_E \leqslant M$. Par conséquent le « sup » de la définition ci-dessous est bien défini (c'est un nombre fini) :

Définition. On pose $|\!|\!| u |\!|\!| := \sup\limits_{x \in E, x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

⚠ Dans la suite, on écrira souvent $\sup_{x \neq 0_E}$ au lieu de $\sup_{x \in E, x \neq 0_E}$.

On dit que $|||u|||$ est la **norme** de u **subordonnée** aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Le résultat suivant énonce qu'il s'agit bien d'une norme :

Proposition. *$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.*

Démonstration. Vérification directe. Soit $u, v : E \to F$ linéaire continue.

1. Clairement $|||u||| \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\|u(x)\|_F = 0$ pour tout $x \in E$, donc si et seulement si $u = 0$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} |||\lambda u||| &= \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|(\lambda u)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|\lambda u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0_E} |\lambda| \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= |\lambda| \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| |||u||| \end{aligned}$$

3. Si $v : E \to F$ est aussi linéaire continue, alors :

$$\begin{aligned} |||u+v||| &= \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)+v(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leqslant \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|v(x)\|_F}{\|x\|_E} = |||u||| + |||v||| \end{aligned}$$

   On a utilisé l'inégalité triangulaire dans F et le fait que, de manière générale pour deux parties A, B de $\mathbb{R}$, on a $\sup\{a+b\,;\, a \in A, b \in B\} \leqslant \sup\{a\,;\, a \in A\} + \sup\{b\,;\, b \in B\}$.

□

Le résultat qui suit est important : il permet d'estimer la norme d'une composée. On en verra plusieurs applications dans la suite.

Proposition. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés. Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires continues. Alors $v \circ u$ est linéaire continue, et*

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \, |||u|||$$

Démonstration. On sait déjà qu'une composée d'applications linéaires continues est linéaires continue, la nouveauté du résultat réside dans la majoration de la norme de $v \circ u$. Quel que soit $x \in E$, on a successivement :

$$\|v \circ u(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G \leqslant |||v||| \, \|u(x)\|_F \leqslant |||v||| \, |||u||| \, \|x\|_E$$

Donc $\dfrac{\|v \circ u(x)\|_G}{\|x\|_E} \leqslant |||u||| \, |||v|||$ pour tout $x \neq 0_E$, d'où la conclusion. □

Différentes expressions de $|||u|||$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$$

Démonstration. La première égalité est la définition de la norme triple. Pour les deux suivantes, on observe que les ensembles dont on prend la borne supérieure sont identiques malgré les apparences. Posons

$$A = \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \,;\, x \neq 0_E \right\}, \; B = \{\|u(x)\| \,;\, \|x\| = 1\}, \; C = \{\|u(x)\| \,;\, \|x\| \leqslant 1\}$$

Il est clair que $B \subseteq A$. Mais si $x \neq 0_E$, alors $x/\|x\|$ est de norme 1 et $\|u(x/\|x\|)\| = \|u(x)\|/\|x\|$, donc en fait $A = B$.

De même, il est clair que $B \subseteq C$. Mais si $\|x\| \leqslant 1$ est différent de 0_E, alors

1.

1. On montre que $|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ par double inégalité.
   a) D'abord $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u(x)\|$ si $\|x\| = 1$. Donc
   b) Puisque $\|u(x)\| \leqslant \|u\|\|x\|$ pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| \leqslant \|u\|$ pour tout x de norme 1. Donc $\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leqslant \|u\|$.
   c) Si $\|u\| = 0$, l'inégalité précédente est évidemment une égalité. Si $\|u\| > 0$, alors pour tout réel α tel que $0 < \alpha < \|u\|$, par définition il existe un $x \in E$ tel que $\|u(x)\| > \alpha\|x\|$. Un tel x est nécessairement non nul, et on peut donc poser $y := x/\|x\|$. Ce vecteur y est de norme 1, et vérifie $\|u(y)\| > \alpha$. Donc $\alpha < \sup_{\|z\|=1} \|u(z)\|$, et ce pour tout α strictement inférieur à $\|u\|$, donc $\|u\| \leqslant \sup_{\|z\|=1} \|u(z)\|$.
2. On montre de même que $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$.
3. Si $x \neq 0_E$, alors $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u(\frac{x}{\|x\|})\|$. Donc $\sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

□

7.3 Formes linéaires continues. Dual topologique

On commence par quelques rappels algébriques. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dual algébrique Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, autrement dit $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On dit que E^* est l'**espace dual** de E. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (somme de deux formes linéaires, produit d'une forme linéaire par un scalaire).

Exemples

1. Formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$:
   — $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (projections)
   — $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$
2. Formes linéaires sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$:
   — $f \mapsto f(0)$ (évaluation en un point)
   — $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$

Hyperplans d'un espace vectoriel Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel H « de codimension 1 », c'est-à-dire qui possède un supplémentaire de dimension 1 : il existe un vecteur non nul $e \in E$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$.

Remarque. Si $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain vecteur e non nul, qui nécessairement n'appartient pas à H, alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$ pour tout vecteur $e \in E \backslash H$.

Lien entre hyperplans et formes linéaires

Proposition. *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Tout hyperplan est le noyau d'une linéaire non nulle.*

Démonstration. 1. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle, et posons $H := \ker(\phi)$. On choisit un vecteur $e \notin H$. Alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$:
   — d'une part $\ker(\phi) \cap \mathrm{Vect}(e) = \{0_E\}$ car $\phi(e) \neq 0$;
   — d'autre part $E = \ker(\phi) \oplus \mathrm{Vect}(e)$, car tout $x \in E$ peut s'écrire
   $$x = \left(x - \frac{\phi(x)}{\phi(e)}e\right) + \frac{\phi(x)}{\phi(e)}e$$
   et dans la somme de droite le premier vecteur appartient à $\ker(\phi)$ et le deuxième appartient à $\mathrm{Vect}(e)$.
2. Si H est un hyperplan, et si $e \in E$ vérifie $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$, alors pour tout $x \in E$ il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_H = \lambda e$. On montre facilement que $x \mapsto \lambda$ est une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est H. □

Définition. Le dual topologique E' d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

Autrement dit : $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$.

Remarque. Si l'espace vectoriel normé E est de dimension finie, alors $E' = E^*$: toute application linéaire définie sur E est continue. En revanche, si E est de dimension finie il y aura des formes linéaires non continues, d'où $E' \subsetneq E^*$.

⚠ $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ est lui aussi un espace vectoriel normé, muni de la norme subordonnée
$$\|\phi\| = \sup_{x \in E \backslash \{0_E\}} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|_E}$$
pour $\phi : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Une question importante est d'identifier cet espace vectoriel normé $(E', \|\cdot\|)$ qui joue un rôle important en analyse fonctionnelle.

Donnons deux exemples. Le symbole $\cong$ dit que les espaces vectoriels normés sont isométriques.

Théorème. $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$

Démonstration. On construit une isométrie explicite entre $(\ell^1)'$ et ℓ^∞.

1. Soit $\phi \in (\ell^1)'$. On note $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ la suite constituée de 0 et d'un unique 1 à la n-ème place. On a $e_n \in \ell^1$ et $\|e_n\|_1 = 1$. On en déduit un nombre réel $\alpha_n := \phi(e_n)$. Comme ϕ est continue, on a $|\phi(e_n)| \leqslant \|\phi\| \|e_n\|_1 = \|\phi\|$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est donc un élément de ℓ^∞. Posons $F(\phi) := \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vient de voir que $\|\alpha\|_\infty \leqslant \|\phi\|$.
2. On montre facilement que l'application $F : (\ell^1)' \to \ell^\infty$ que l'on vient de construire est linéaire.
3. On construit une application réciproque $G : \ell^\infty \to (\ell^1)'$. Si $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, on définit $\phi : \ell^1 \to \mathbb{R}$ en posant $\phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Remarquons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ existe bien car la série $\sum x_n$ est absolument convergente ($x \in \ell^1$) et la suite (α_n) est bornée, donc la série $\sum \alpha_n x_n$ est absolument convergente. De plus, $|\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n| \leqslant \|\alpha\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|\alpha\|_\infty \|x\|_1$, donc $\phi : \ell^1 \to \mathbb{R}$ est linéaire continue avec $\|\phi\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$. On pose $G(\alpha) := \phi$, ce qui définit une application $G : \ell^\infty \to (\ell^1)'$. On montre facilement que G est linéaire.
4. On vérifie que F et G sont réciproques l'une de l'autre : si $\phi \in (\ell^1)'$ alors $G(F(\phi)) = \phi$ et si $\alpha \in \ell^\infty$ alors $F(G(\alpha)) = \alpha$.
5. Il reste à avoir que F et G sont des isométries, autrement dit que $\|\phi\| = \|\alpha\|_\infty$ si ϕ et α sont reliées par $F(\phi) = \alpha$ (et donc $G(\alpha) = \phi$). On a déjà vu que $\|\alpha\|_\infty \leqslant \|\phi\|$. Inversement, on observe que $\phi(e_n) = \alpha_n$, par définition de la suite e_n et de ϕ à partir de α. Or $\|e_n\|_1 = 1$, donc $\|\phi\| = \sup_{\|x\|_1=1} |\phi(x)| \geqslant |\alpha_n|$, et cela quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\|\phi\| \geqslant \|\alpha\|_\infty$ comme on voulait, d'où finalement l'égalité $\|\phi\| = \|\alpha\|_\infty$.

□

c_0 est l'espace vectoriel normé des suites réelles qui convergent vers 0, avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel normé de ℓ^∞.

Théorème. $(c_0)' \cong \ell^1$

Démonstration. Même méthode que pour montrer que $(\ell^1)'$ et ℓ^∞ sont isométriques. □

7.4 Applications multilinéaires continues

7.5 Espaces de Banach

Définition. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

Exemples D'après ce que nous avons vu précédemment :

1. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.
2. $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Théorème. *Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach (pour la norme subordonnée).*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E, F)$. On veut montrer qu'elle converge, c'est-à-dire qu'il existe $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que $u_n \to u$ pour la norme $\| \, \|$ subordonnée aux normes de E et F.

1. On commence par observer que, pour chaque $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. C'est évident pour $x = 0_E$, car alors $u_n(x) = 0_F$ pour tout n. Supposons donc $x \neq 0_E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$. Alors $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F = \|(u_n - u_p)(x)\|_F \leqslant \|u_n - u_p)\| \, \|x\|_E$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, on peut choisir un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon/\|x\|_E$ pour tous $n, p \geqslant N$. On en déduit que $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leqslant \varepsilon$ si $n, p \geqslant N$, ce que l'on voulait.
2. Comme F est complet par hypothèse, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite que l'on note $u(x) \in F$. On « réunit » ces limites en une application $u : E \to F$.
3. On montre que $u : E \to F$ est linéaire :
   a) Si $x, x' \in E$, alors $u_n(x) \to u(x)$ et $u_n(x') \to u(x')$, par conséquent $u_n(x + x') = u_n(x) + u_n(x')$ converge à la fois vers $u(x + x')$ et vers $u_n(x) + u_n(x')$, d'où $u(x + x') = u(x) + u(x')$ par unicité de la limite..
   b) De même , $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ si $x \in E$ et $\lambda \in R$.
4. On montre simultanément que u est linéaire continue et que $u_n \to u$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. On choisit un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon$ quels que soient $n, p \geqslant N$.
   a) Pour chaque $x \in E$ et $n, p \geqslant N$, on a donc $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leqslant \varepsilon\|x\|_E$. On fait tendre $p \to +\infty$ dans cette inégalité, en maintenant x et n fixés. Alors $u_p(x) \to u(x)$, donc $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \to \|u_n(x) - u(x)\|_F$, et on obtient ainsi à la limite l'inégalité $\|u_n(x) - u(x)\|_F \leqslant \varepsilon\|x\|_F$.
   b) Cette dernière inégalité, vraie pour tout $x \in E$, prouve en particulier que $u_n - u$ est linéaire *continue*, donc que u est continue puisque $u = (u - u_n) + u_n$, et que de plus $\|u - u_n\| \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant N$
   c) On vient bien de montrer que u est linéaire continue et que $u_n \to u$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ pour la norme subordonnée.

□

Autres exemples d'espaces de Banach

1. $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, donc tout sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est également complet. En particulier :

a) Si X est un espace topologique (par exemple métrique) alors le sous-espace $C_b^0(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues bornées est complet.

b) Si X est un espace topologique compact, alors $C^0(X, \mathbb{R})$ est complet (toute fonction continue est bornée).

2. $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un cas particulier de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, donc est complet.
3. $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet (voir feuille TD).
4. $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est complet (voir feuille TD).

7.5.1 Définition et exemples

Définition. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

7.5.2 Séries convergentes dans un espace de Banach

Proposition. *Soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute série normalement convergente est convergente. Alors E est un espace de Banach.*

Démonstration. On suppose que toute série normalement convergente est convergente, et il s'agit de montrer que E est complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de E. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'il en existe une sous-suite convergente.

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :
— il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{2}$ quels que soient $n, p \geqslant N_1$;
— il existe $N_2 > N_1$ tel que $\|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{2^2}$ quels que soient $n, p \geqslant N_2$;
— il existe $N_3 > N_2$ tel que $\|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{2^3}$ quels que soient $n, p \geqslant N_3$;
— etc.

On construit ainsi une suite strictement croissante d'entiers $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_k < N_{k+1} < \cdots$ de sorte que :

$$\forall k \geqslant 1, \forall n, p \geqslant N_k, \|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

En particulier, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

On voit que la série réelle $\sum_{k\geqslant 1} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|$ convergente, car c'est une série positive dont le terme général est majoré par le terme général d'une série convergente. D'après l'hypothèse faite sur E, la série $\sum_{k\geqslant} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ converge dans E. Or il s'agit d'une série télescopique, et sa somme partielle est $\sum_{k=1}^{K} = x_{N_{K+1}} - x_{N_1}$. On en déduit que la suite $(x_{N_k})_{k\geqslant 1}$ est convergente. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite-suite convergente, et donc elle converge, ce que l'on voulait montrer. □

⚠ Ce qui importe dans la démonstration, c'est que la série $\sum \frac{1}{2^k}$ soit convergente.

7.5.3 Exemple : série exponentielle dans $\mathcal{L}_c(E)$

On considère un espace de Banach E, par exemple $E = \mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme.

On note $\mathcal{L}_c(E) := \mathcal{L}_c(E, E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E qui sont continus (la norme de E sert de norme d'espace de départ et d'espace d'arrivée). On a défini sur $\mathcal{L}_c(E)$ la norme subordonnée

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \qquad \forall u \in \mathcal{L}_c(E)$$

On sait que $\mathcal{L}_c(E)$ est complet pour $||| \cdot |||$, car E l'est par hypothèse (complétude de l'espace d'arrivée). En particulier, toute série de $\mathcal{L}_E(c)$ qui est normalement convergente est convergente. Ceci va nous permettre de définir l'**exponentielle** $\exp(u) = e^u$ d'un endomorphisme continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$.

Si $u \in \mathcal{L}_c(E)$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente car

$$\|\frac{u^n}{n!}\| \leqslant \frac{1}{n!}\|u^n\| \leqslant \frac{1}{n!}\|u\|^n$$

et la série réelle $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}\|u\|^n$ est convergente : sa somme est $e^{\|u\|}$.

Définition. L'**exponentielle** e^u de $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est $e^u := \sum_{n \geqslant 0} \frac{u^n}{n!}$.

Comme application, démontrons le résulat suivant.

Proposition. $\mathrm{GL}_c(E)$ *est ouvert dans* $\mathcal{L}_c(E)$.

Que signifie « $\mathrm{GL}_c(E)$ » ?

— De manière générale, $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires $u : E \to E$ qui sont bijectives. Leur application réciproque $u^{-1} : E \to E$ est alors automatiquement linéaire elle aussi.

— $\mathrm{GL}_c(E)$ est l'ensemble des applications linéaires $u : E \to E$ qui sont bijectives et continues. Un théorème des espaces de Banach, le **théorème de l'application ouverte**, affirme qu'alors u^{-1} est elle aussi continue.

Démonstration. Pour montrer que $\mathrm{GL}_c(E)$ est ouvert : d'abord on montre que l'identité id_E (qui est bien continue) est dans l'intérieur de $\mathrm{GL}_c(E)$, puis on en déduit que tout $v \in \mathrm{GL}_c(E)$ est intérieur à $\mathrm{GL}_c(E)$ en se ramenant à id_E.

1. Pour montrer que id_E est intérieur à $\mathrm{GL}_c(E)$, on s'inspire de l'égalité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} x^n$$

valable pour tout réel x tel que $|x| < 1$. Observez que cette égalité affirme que $1 - x$ est inversible si $|x| < 1$ (donc si x est assez proche de 0) et donne une expression de son inverse sous forme d'une série.

En s'inspirant de ce résultat et de sa démonstration, soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors :

a) La série $\sum_{n \geqslant 0} u^n$ est normalement convergente, donc elle est convergente. En effet, on a $|||u^n||| \leqslant |||u|||^n$ pour tout n, et la série $\sum_{n \geqslant 0} |||u|||^n$ converge puisque $|||u||| < 1$. Donc la série $\sum_{n \geqslant 0} |||u^n|||$ converge (comparaison de séries à termes positifs).

b) De plus :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N} u^n\right) \circ (\mathrm{id}_E - u) &= (\mathrm{id}_E + u + \cdots + u^N) \circ (\mathrm{id}_E - u) \\ &= \mathrm{id}_E + u + \cdots + u^N - (u + u^2 + \cdots + u^{N+1}) \\ &= \mathrm{id}_E - u^{N+1}\end{aligned} \tag{7.5}$$

Or $u^n \to 0$ dans $\mathcal{L}_c(E)$ quand n tend vers l'infini, toujours parce que $|||u^n||| \leqslant |||u|||^n$ et que $|||u||| < 1$. On en déduit, en passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans (7.5), que :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \circ (\mathrm{id} - u) = \mathrm{id}_E \tag{7.6}$$

Ceci prouve que $\mathrm{id}_E - u$ est inversible lorsque $|||u||| < 1$ et que son inverse est alors $(\mathrm{id}_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

c) On vient en particulier de montrer que $B(\mathrm{id}_E, 1) \subseteq \mathrm{GL}_c(E)$, donc que id_E est intérieur à $\mathrm{GL}_c(E)$! En effet, si $v \in B(\mathrm{id}_E, 1)$ alors $u := \mathrm{id}_E - v$ est de norme < 1, donc $v = \mathrm{id}_E - u$ est inversible.

□

7.6 Applications multilinéaires continues

Pour simplifier, commençons par considérer les applications bilinéaires continues. On se donne trois espaces vectoriels normés E, F et G, et une application bilinéaire $A : E \times F \to G$. On munit $E \times F$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$ associée aux normes sur E et F.

Proposition. *Il y a équivalence entre :*

1. *A est continue sur $E \times F$.*
2. *A est continue au point $(0_E, 0_F)$.*
3. *Il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que :*

$$\|A(x, y)\|_G \leqslant M \|x\|_E \|y\|_F \qquad \forall (x, y) \in E \times F \tag{7.7}$$

Démonstration. On prouve (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2) C'est évident.

(2) $\Rightarrow$ (3) On suppose A continue à l'origine. Comme $A(0_E, 0_F) = 0_G$ pour une application bilinéaire, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\|_{E\times F} < \delta \Longrightarrow \|A(x, y)\| < 1$$

Si $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, alors $A(x, y) = 0_G$ par bilinéarité de A. Si $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_F$, alors

$$\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_E}, \frac{\delta y}{2\|y\|_F}\right)$$

$\square$