Année 2019-2020
L2 — Prépa agro-véto
HLMA413 Mathématiques

ÉPREUVE ÉCRITE

15 mai 2020 — 14h - 15h30

N.B. La ***qualité de la rédaction et de la présentation*** *sera largement prise en compte dans la notation ; gardez à l'esprit que vous vous adressez à un lecteur, auquel vous expliquez votre démarche, votre raisonnement, vos calculs.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. Soit z un nombre complexe différent de 1. Le but de l'exercice est de montrer que z est de module 1 si et seulement si $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

(1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler, montrer que $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)\, e^{i\theta/2}$. Trouver une expression semblable pour $1 - e^{i\theta}$.

(2) On suppose que z est de module 1 et $z \neq 1$. Montrer qu'alors $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

(3) Réciproquement, si $z \neq 1$ et $\frac{1+z}{1-z} = ia$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que z est de module 1.

Exercice 2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx$, en commençant par effectuer le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $x(0) = 1$ et

$$x'(t) - \frac{t}{t^2 - 1} x(t) = 2t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} \qquad \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n pour $x > 0$, calculer sa dérivée.

(2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n pour $x = 0$.

(3) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

(4) Donner le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(u) = e^{-u} - (1 - u)$$

(5) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

On pourra admettre ce résultat dans un premier temps, et faire la suite (on pourra aussi étudier le signe de $g(u) - u^2/2$ pour $u > 0$).

(6) On note Cf_n, la courbe représentative de f_n. Trouver une asymptote D_n à la courbe Cf_n, pour x tendant vers $+\infty$. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

(7) Donner les positions relatives de la courbe Cf_n, et de la courbe Cf_k, pour $n > k$.

(8) Tracer l'allure de Cf_1 et Cf_2, ainsi que leurs asymptotes, dans n repère orthonormé d'unité 4cm. On demande un tracé à la main, et non un `CTRL-C/CTRL-V` de fichier numérique.