Année 2019-2020
L2 — prépa agro-véto
HLMA413 Mathématiques

Feuille TD4 : intégrales et équations différentielles

Exercice 1. Calculer en reconnaissant l'intégrale d'une dérivée composée : (a) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$; (b) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$; (c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$; (d) $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(t)}}\,dt$; (e) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$.

Exercice 2. Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties : (a) $\int_0^1 xe^x\,dx$; (b) $\int_0^1 (x^2-x+1)\,e^x\,dx$. (c) $\int_1^2 x\ln x\,dx$; (d) $\int_1^x \ln t\,dt$, pour $x>0$; (e) $\int_0^x t\cos t\,dt$; (f) $\int \arctan(x)\,dx$.

Exercice 3. Calculer en effectuant un changement de variables : (a) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$; (b) $\int_0^x \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$; (c) $\int_1^4 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt$; (d) $\int_1^x e^{\sqrt{t}}\,dt$; (e) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

Exercice 4. Trouver des nombres réels a, b tels que $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$.

Exercice 5. Soit F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$.

(1) Montrer que F est C^1 et que $F(x) + F(1/x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

(2) En déduire que : $\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + F(x)$.

Exercice 6. Calculer : (a) $\int_0^{\pi/4} \cos^2(u)\,du$; (b) $\int_0^x \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$; (c) $\int_0^{\pi/4} \sin^3(x)\,dx$.

Exercice 7. (1) Montrer que $\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\,dx + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que $\int e^x\sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

(3) En déduire $\int e^x\cos(x)\,dx$.

Exercice 8. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

(1) Montrer que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

(2) En déduire que I_n converge et en donner la limite.

Exercice 9. (**extrait de ENSAB 2012**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (1+1/x)\ln(x)$. Calculer l'aire de la surface située entre la courbe représentative de f et l'axe des x, pour x compris entre 1 et 2.

Exercice 10. (**ENSAB 2017**) On considère les fonctions f et g définies sur $[0, \pi/4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}} dt, & \text{si } x \in]0, \pi/4] \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt \quad \text{si } x \in [0, \pi/4]$$

(1) Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{2}} g(x)$ pour $x \in]0, \pi/4]$.
(2) Calculer $g(x)$ pour $x \in [0, \pi/4]$.
(3) Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f est continue en 0.
(4) Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f n'est pas dérivable à droite en 0.
(5) Calculer la dérivée de f sur $]0, \pi/4]$.

Exercice 11. (**ENSAB 2018**) Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, 1[$ par

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t}, \quad g(t) = \frac{t}{\ln t}, \quad h(t) = \frac{1}{lnt}, \quad t \in]0, 1[$$

(1) Montrer que g et h sont prolongeables par continuité en 0.
(2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
(3) Montrer, à l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera, que $\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ pour $x \in]0, 1[$.
(4) En utilisant la question précédente, montrer que $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ pour $x \in]0, 1[$.
(5) Montrer, en justifiant les inégalités avec soin, que pour $x \in]0, 1[$,

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

(6) Calculer $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$ pour $x \in]0, 1[$,
(7) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ et déduire sa valeur des questions précédentes.

Exercice 12. (**ENSAB 2010**) *La plupart des question peuvent être traitées indépendamment.*

(1) On considère l'équation différentielle $xy' - y = x$ définie pour $x \in]0, +\infty[$. Quelle est la solution générale de $xy' - y = x$? Déterminer la solution particulière h de l'équation $xy' - y = x$ telle que $h(e) = e$.
(2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.
   (a) Démontrer que f est continue sur $[0 + \infty[$.
   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
   (d) Dessiner C_f. On représentera les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.
(3) (a) Déterminer la position relative de C_f et de la droite d'équation $y = x$ selon les valeurs de x.
   (b) Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, hachurer l'ensemble A des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 < x < e \\ f(x) < y < x \end{cases}$$

   Calculer l'aire de l'ensemble A.