Année 2019-2020
L3 — Prépa Agro-Véto
HLMA413 Mathématiques

# Devoir maison (à rendre le 8 avril 2020)

*N.B. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.** On considère la fonction $f : [-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{x}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

1. Montrer que $f$ est continue sur $[-1, +\infty[$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $[-1, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$.
3. Donner le tableau de variations de $f$ et calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

   *On pourra utiliser les valeurs approchées* $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \cong -2,62$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \cong -0,38$ *et* $f(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) \cong -0,2$.
4. Le but de cette question est d'étudier plus précisément le comportement de $f$ en $+\infty$.

   a) Déterminer $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{1+h} - e}{h}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} (1 + x)(e^{\frac{x}{x+1}} - e)$, par exemple en observant que $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

   b) En déduire que la fonction $f$ possède une asymptote en $+\infty$, dont on donnera l'équation.
5. Donner l'allure du graphe de $f$. On représentera en particulier les points où le graphe de $f$ et l'asymptote intersectent l'axe des abscisses.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^x$.

1. Étudier les variations de $f$ ainsi que le comportement de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner l'allure de la représentation graphique de $f$.
2. Quelle est l'image de $f$ ? Justifier brièvement la réponse.
3. Pour quelle raison $f$ n'est-elle pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image ?
4. Démontrer que $f$ induit une bijection, notée $h$ dans la suite de l'exercice, de $[-1, +\infty[$ sur $[-1/e, +\infty[$.
5. On note $W$ l'application réciproque de $h$. Justifier que $W$ est dérivable sur $]-1/e, +\infty[$ et montrer que
$$W'(y) = \frac{W(y)}{y(1 + W(y))}$$
pour tout $y \in ]-1/e, +\infty[$. $W$ est-elle dérivable en $-1/e$ ?