HLMA413 Feuille TD2 : exercice 5

David Théret

March 2020

1. Déjà vu.
2. On cherche la limite de $e^{x-\sin x}$ lorsque $x \to +\infty$. L'exposant $x - \sin x$ est assez simple à comprendre : comme sin est une fonction bornée (minorée par -1 et majorée par 1), on a $x - \sin x \to +\infty$. Donc, en passant à l'exponentielle :
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$$
3. On cherche la limite de $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln x}$ lorsque $x \to +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, donc il faut mieux comprendre le numérateur et le dénominateur :
   — Au numérateur, c'est x qui domine $\sqrt{x}$ quand $x \to +\infty$, donc on le met en facteur :
   $$x - \sqrt{x} = x(1 - 1/\sqrt{x})$$
   — Au dénominateur, c'est x qui domine $\ln x$ quand $x \to +\infty$ donc on le met en facteur :
   $$x + \ln x = x(1 + \frac{\ln x}{x})$$

   On en déduit que :
   $$\frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln x} = \frac{x(1-1/\sqrt{x})}{x(1+\frac{\ln x}{x})} = \frac{1-1/\sqrt{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}$$
   et donc
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln x} = 1$$
   On a utilisé la **limite classique** :
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
4. On cherche la limite de $\ln x \times \ln(\ln x)$ quand $x \to 1^+$. IL s'agit d'une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.

Mais en posant $X = \ln x$, on reconnaît la **limite classique** :

$$\lim_{X \to 0^+} X \ln X = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x \ln(\ln x) = 0$$

5. On cherche la limite de $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x$ quand $x \to +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. La différence de logarithmes attire notre attention, mais il faut gérer la présence du facteur $1/2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x &= \frac{1}{2}\big(\ln(1+x^2) - 2\ln x\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln(1+x^2) - \ln(x^2)\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x^2}{x^2}\Big)\end{aligned}$$

La parenthèse dans le logarithme tend vers 1, donc le tout tend vers 0 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x = 0$$

6. On cherche la limite de $\ln(\sin x) - \ln x$ lorsque $x \to 0^+$. A nouveau, on remarque une différence de logarithmes :

$$\ln(\sin x) - \ln x = \ln\big(\frac{\sin x}{x}\big)$$

A l'intérieur du logarithme, on remarque ici une **limite usuelle** :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

qui n'est rien d'autre que le fait que la fonction sinus soit dérivable en 0, et de dérivée $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

7. On cherche la limite de $x^2 e^{-\sqrt{x}}$ lorsque $x \to +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type ∞/∞.

Mais on reconnaît une **limite classique** :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty, \quad \text{et même} \quad \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^\alpha} = +\infty \quad \text{pour tout nombre } \alpha$$

Ici, on pose $X = \sqrt{x}$ et on écrit

$$\frac{x^2}{e^{-\sqrt{x}}} = \frac{X^4}{e^X}$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$$

8. Déjà vu : on écrit $x^x = e^{x \ln x}$ et on utilise la limite classique

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

   On en déduit que

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1$$

9. Il n'y pas de limite ! En effet, il y a une limite à gauche et une limite à droite, mais elles ne sont pas égales.
10. Même situation que dans l'exemple précédent ! En effet, $\sqrt{x^2} = |x|$, donc le quotient est égal à 1 si $x < 0$ et à 1 si $x > 0$.
11. On cherche la limite de $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type ∞/∞. Pour mieux comprendre le numérateur, on met en facteur le terme dominant à l'intérieur du logarithme et on utilise la propriété du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^x) &= \ln\big(e^x(1 + e^{-x})\big) \\ &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= x + \ln(1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

   Or $\ln(1 + e^{-x})$ tend vers $\ln 1 = 0$ quand $x \to +\infty$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} = 1$$