# HLMA413 Feuille TD3 : nombres complexes

David Théret

March 2020

**Exercice 1.** On pose $z = 1 + i$ et $w = 1 + i\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de $z$ et $w$. En déduire le module et un argument de $zw$ (le produit de $z$ et $w$). En déduire que :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

**Exercice 2.** Donner l'écriture trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants : (a) $1+i$ ; (b) $1-i$ ; (c) $2+2i\sqrt{3}$ ; (d) $-2-2i$ ; (e) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ; (f) $-2$ ; (g) $-3i$

**Exercice 3.** Calculer $(\sqrt{3}+i)^9$. Calculer $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{96}$.

**Exercice 4.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $|z+2| = |z-1+2i|$.

**Exercice 5.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

**Exercice 6.** Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants : (a) $-4$ ; (b) $i$ ; (c) $1+i$ ; (d) $1-i$ ; (e) $(1+i)/4$.

**Exercice 7.**

1. Rappeler la formule d'Euler pour $\cos\theta$.
2. En utilisant cette formule et la formule du binome de Newton, développer $\cos^5\theta$.
3. Dans l'expression développée obtenue, regrouper les exponentielles ayant des exposants opposés.
4. En déduire que ;

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}(\cos(5\theta) + ?\cos(3\theta) + ?\cos(\theta)) \tag{1}$$

où les « ? » sont des nombres à déterminer. En déduire la valeur de :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^5(\theta)\, d\theta$$

5. En suivant la même méthode, montrer que

$$\cos^2\theta\sin^3\theta = \frac{1}{16}(?\sin(5\theta+?\sin(3\theta)+?\sin(\theta))$$

où les « ? » sont des nombres à déterminer.

**Exercice 8.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. En déduire les sommes $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
2. Avec la même idée, calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.