HLMA413 Feuille TD2

David Théret

March 2020

Exercice 1. ok

Exercice 2. ok

Exercice 3. ok

Exercice 4. ok

Exercice 5. ok

Exercice 6. Un exercice sur la notion de composition. Pour réviser cette notion, voyez cette vidéo sur les applications ($2'17'' - 3'55''$). Il s'agit de comprendre :

— la notation $g \circ f$

— pourquoi généralement $f \circ g$ n'est pas la même chose que $f \circ g$

— comment déterminer le domaine de définition de $g \circ f$

A quelle condition l'expression $g \circ f(x)$ est-elle définie ? Il faut déjà que $f(x)$ existe, donc que x appartienne au domaine de définition de f, mais cela ne suffit pas : il faut aussi que $g(f(x))$ existe, donc que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g...

Exercice 7. Deux parties indépendantes dans cet exercice : la première question aborde la notion de prolongement par continuité (étude en 0), la deuxième la notion d'asymptote (étude en $+\infty$).

1. Pour le prolongement par continuité d'une fonction, voir cette vidéo ($7'52'' - 11'14''$). Ce qu'il faut retenir, c'est que :

   — si une fonction f est définie en un point a, on peut se demander si f est continue en a : cela revient à déterminer si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et, si oui, si cette limite est bien égale à $f(a)$;

- en revanche, si f n'est pas définie en a, alors cela n'a pas de sens de se demander si elle est continue en a ou non, mais on peut chercher à donner à $f(a)$ une valeur (on *prolonge* ainsi la fonction f, au sens où on augmente son domaine de définition) de sorte à ce que la fonction « prolongée » soit continue au point a.

Généralement, on prolonge une fonction continue sur son domaine de définition à un ou plusieurs points supplémentaires en lesquels elle n'est pas définie, mais où on sent bien qu'on pourrait la « prolonger ».

Observez l'exemple donné dans la vidéo (à partir de 9'46). Demandez à `geogebra` de tracer le graphe de la fonction donnée dans l'exemple et zommez sur l'origine (au bout d'un moment, vous devriez voir que rien ne change quand vous zommez...) On a bien l'impression que la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$ possède une limite au point 0, en lequel elle n'est pas définie, non ? La vidéo démontre que c'est bien le cas, en appliquant le théorème des gendarmes.

Si vous demandez de même à `geogebra` de tracer le graphe de la fonction f de l'exercice 7, vous devriez observer une situation encore plus régulière (pas d'oscillations infinies, ici). Pour *démontrer* que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et est bien ce que vous voyez, quelques idées :

- que savez-vous de $\ln(a/b)$, le logarithme d'un quotient ?
- que savez-vous de la limite de $x\ln(x)$ quand x tend vers 0^+ ?

Cette dernière question porte sur une limite classique que vous devez impérativement connaître, comme quelques autres sur l'exponentielle et le logarithme. Voyez cette vidéo pour réviser la définition et les propriétés essentielles de ces deux fonctions (en particulier à partir de $12'07''$ pour les limites).

⚠ Vous avez quelques « mini-exercices » proposés à la fin de la vidéo, je vous les conseille fortement.

2. Je propose de passer cette question pour le moment. J'aborderai la notion d'asymptote dans un autre exercice.

Exercice 8. Cet exercice, comme le suivant, aborde le « **théorème de la bijection** ». Pour des rappels, voir cette vidéo :

- sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité (début de la vidéo jusqu'à $2'00''$)
- la notion de bijection réciproque ($2'00'' - 3'13''$)
- le théorème de la bijection ($3'13'' - 7'56''$ avec des exemples, la démonstration est donnée à partir de $7'56''$)

Attention, vous avez l'habitude d'appliquer ce théorème à des fonctions dérivables sur un intervalle I (donc elles sont aussi continues, tout va bien). Pour montrer qu'une fonction dérivable est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I), on montre que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$).
⚠ On peut même avoir des points où la dérivée s'annule, à condition qu'ils soient « isolés », par exemple comme pour la fonction $x \mapsto x^3$: sa dérivée est strictement positive partout sauf en O, où elle est nulle. Cette fonction est bien strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Toujours pour une fonction f dérivable telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (ou bien $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$), on montre que la bijection réciproque $g = f^{-1}$ est également dérivable, et que sa dérivée est donnée par :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Voyez cette vidéo, à partir de $10'20''$, avec un exemple.