Année 2019-2020
L2 — Prépa Agro-Véto
HLMA413 Mathématiques

Feuille d'exercices no.1

1. Calculs élémentaires

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8}}{3}$; (b) $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ et $\frac{\frac{2}{3}}{4}$; (c) $\frac{\frac{2^{1/4}\,3^{3/4}}{\sqrt{6}}}{(\frac{2}{3})^{1/4}}$; (d) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; (e) $2^{\frac{1}{\ln 2}}$; (f) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$; (g) $2\ln\left(\sqrt{e^x}\right) - x$.

Exercice 2. Calculer : (a) $(-2)^4$; (b) -2^4 ; (c) 2^{-4} ; (d) $8^{-2/3}$.

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes : (a) $4x^2-9$; (b) $2x^2-x-6$; (c) x^3-2x^2-x+2 ; (d) x^3+8 ; (e) $(x-1)(x^2+1)+2x(x-1)$.

Exercice 4. Donner une écriture plus simple des expressions suivantes : (a) $\ln\left((-2)^2\right)$; (b) $\exp(10\ln(2))$; (c) $\ln(100)-2\ln(2)-\ln(5)$.

Exercice 5. Compléter les identités remarquables : (i) $(a+b)^2 = \cdots$; (ii) $(a-b)^2 = \cdots$; (iii) $a^2-b^2 = \cdots$; (iv) $a^3+b^3 = (a+b)(\cdots)$; (v) $a^3-b^3 = (a-b)(\cdots)$.

2. Sommes et produits

Exercice 6. Calculer, en fonction de l'entier n, les sommes et produits suivants : (i) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$; (ii) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n$; (iii) $\prod_{k=1}^{n}(-1)^k$; (iv) $\prod_{k=1}^{n}(-1)^n$.

Exercice 7. Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

(1) La somme des entiers de 1 à n vaut ... (compléter)

(2) La somme des entiers impairs de 1 à $2n-1$ vaut n^2.

(3) Développer puis simplifier l'expression $k^3-(k-1)^3$. En déduire la somme $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

(4) En déduire la somme des carrés des entiers pairs puis la somme des carrés des entiers impairs.

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 9. (1) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(a_{k-1} - a_k)$.

(2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \times k!)$ en écrivant $k \times k!$ comme la différence de deux factorielles successives.

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = (a_0 + a_n)\frac{n+1}{2}$.

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes : (a) $\sum_{k=1}^{n}(2+3k)^2$; (b) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

Exercice 12. (1) Montrer que $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$.

(2) Montrer que $(n+3)\,n! - (n-1)(n-1)! = (n-1)!\,(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)!\,(n+1)}{n}$.

3. Dénombrement élémentaire

Exercice 13. (1) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{0}{k}$, $\binom{1}{k}$, $\binom{2}{k}$, $\binom{3}{k}$ et $\binom{4}{k}$ pour toutes les valeurs possibles de k.

(2) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$, en supposant pour les deux derniers que $n \geqslant 1$

(3) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(4) En utilisant ces formules, déterminer tous les nombres $\binom{n}{k}$ pour $n \leqslant 10$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ (triangle de Pascal).

Exercice 14. Développer $(a+b)^6$ et $(a-b)^7$ en utilisant la formule du binôme [1].

Exercice 15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = 0$.

Exercice 16. Combien y a-t-il d'injections [2] d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ? Combien y a-t-il de bijections [3] entre deux ensembles à n éléments ?

1. Si vous ne connaissez pas la **formule du binôme**, faites une recherche sur internet.
2. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **injection**, faites une recherche sur internet.
3. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **bijection**, faites une recherche sur internet.