Licence 2 - 2019/2020

HLMA304 : Arithmétique
Thierry Mignon
Octobre 2019

Correction du Contrôle continu

Durée : 1h15 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. *Cours.* Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\operatorname{pgcd}(a, b) \times \operatorname{ppcm}(a, b) = a \times b$$

(Si vous souhaitez utiliser la décomposition en facteur premier, démontrer comment on peut calculer $\operatorname{pgcd}(a, b)$ et $\operatorname{ppcm}(a, b)$ à l'aide des décompositions de a et b).

Exercice 2. Résoudre l'équation diophantienne :

$$(**) \qquad 54x + 42y = 72, \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Exercice 3. Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\operatorname{pgcd}(a, b) + \operatorname{ppcm}(a, b) = b + 9.$$

(*Indication : Écrire $a = a'd$, $b = b'd$, où $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$, et traiter les différents cas possibles.*)

Exercice 4. *Une équation diophantienne de degré* 2.
On souhaite résoudre l'équation diophantienne :

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = 3z^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$$

(1) Montrer qu'il suffit de chercher les triplets de solutions (x, y, z) premiers entre eux, c'est à dire tels que $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$.

Dans la suite, nous noterons (x, y, z) un triplet d'entiers *premiers entre eux* solution de $(*)$.

(2) Montrer que l'on ne peut pas avoir simultanément $3|x$ et $3|y$. En déduire que ni x ni y ne sont multiples de 3.

(3) En considérant l'équation dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$.