

**HLMA304, Arithmétique**  
**Examen de première session, Janvier 2020**

**Durée : 2h**

*Téléphones, calculatrices et documents sont interdits*

---

**Exercice 1.** *Cours*

Montrer le théorème de Wilson :

$$(p-1)! \equiv -1[p] \iff p \text{ est premier.}$$

**Exercice 2.**

- (1) Trouvez un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $35u + 22v = 1$ .
- (2) Trouvez la plus petite solution positive de l'équation :

$$\begin{cases} x \equiv 10[22] \\ y \equiv 7[35] \end{cases}$$

**Exercice 3.**

- (1) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer le reste de la division euclidienne de  $10^k$  modulo 6. (*Indication : On pourra procéder par récurrence.*)
- (2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5[7].$$

**Exercice 4.** Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  le système :

$$\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 72 \end{cases}$$

**Exercice 5.** Vous demandez à un ami de multiplier par 13 le jour de sa naissance, de multiplier par 14 le mois de naissance, et d'additionner ces deux résultats pour former un nombre  $n$  qu'il vous communique.

Comment pouvez vous retrouver le jour et le mois de sa naissance ?