Contrôle continu 2 - Correction

Exercice 1. Soient a et b deux éléments d'un corps $\mathbb{K}$. On considère la matrice $D_{2n} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$ dont les entrées diagonales vallent a, les entrées "antidiagonales" vallent b et les autres entrées sont nulles :

$$D_{2n} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

(a) Il est clair que $D_2 = a^2 - b^2$.

(b) On considère la matrice D_{2n}, on développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\det(D_{2n}) = a\det(A_n) + (-1)^{2n+1} b\det(B_n) = a\det(A_n) - b\det(B_n),$$

où A_n est la matrice de taille $2n-1$ ayant des a sur la diagonale et des b juste en-dessus de l'anti-diagonale, avec les autres entrées nulles. et où B_n est la matrice de taille $2n-1$ ayant des b sur l'anti-diagonale et des a juste en-dessous de la diagonale, toujours des zéros ailleurs.
En développant A_n par rapport à la dernière ligne, on obtient $\det(A_n) = (-1)^{2n-1+2n-1} a\det(D_{2n-2}) = a\det(D_{2(n-1)})$. En développant B_n par rapport à la première ligne, on obtient $\det(B_n) = (-1)^{2n-1+1} b\det(D_{2n-2}) = b\det(D_{2(n-1)})$.
En recollant les trois égalités, on obtient $\det(D_{2n}) = (a^2-b^2)\det(D_{2(n-1)})$. Un récurrence immédiate montre que $\det(D_{2n}) = (a^2-b^2)^n$.
En particulier, $\det(D_4) = (a^2-b^2)^2$ et $\det(D_6) = (a^2-b^2)^3$.

Exercice 2. On considère les deux polynômes réels

$$A = X^4 + 3X^3 + X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 - X^3 - X^2 + X.$$

(a) On utilise l'algorithme de Gauss, en faisant des divisions euclidiennes successives.
D'abord $A = B + R$ où $R = 4X^3 + 2X^2 - 4X - 2$, qui assure $\mathrm{pgcd}(A,B) = \mathrm{pgcd}(B,R)$
Puis $B = RQ_1 + R_1$ où $Q_1 = \frac{1}{4}X + \frac{3}{8}$ et $R_1 = \frac{-3}{4}(X^2-1)$. On pose ensuite $R_1' = X^2 - 1 = \frac{-4}{3}R_1$ pour simplifier les calculs. On a $\mathrm{pgcd}(B,R) = \mathrm{pgcd}(R,R_1) = \mathrm{pgcd}(R,R_1')$
Ensuite la division euclidienne de R par R_1 assure $R = R_1(2X+1)$ dont le reste est nul. On a alors $\mathrm{pgcd}(R,R_1') = \mathrm{pgcd}(R_1',0) = R_1'$ puisque ce dernier est unitaire.
On conclut que $\mathrm{pgcd}(A,B) = X^2 - 1$.

(b) Il suffit de remonter les égalités précédentes :

$$\mathrm{pgcd}(A,B) = R_1' = \frac{-4}{3}R_1 = \frac{-4}{3}(B - RQ_1) = \frac{-4}{3}(B-(A-B)Q_1) = \frac{4}{3}Q_1 A - \frac{4}{3}(1+Q_1)B.$$

Exercice 3. (a) Une partie $I \subset \mathbb{K}[X]$ est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$ si

(i) I est non-vide,

(ii) $\forall a, b \in I, a+b \in I$ et $-a \in I$,

(iii) $\forall a \in I, \forall b \in \mathbb{K}[X], ab \in I$.

(b) I est non vide donc contient un élément a. De plus $b = 0 \in \mathbb{K}[X]$ donc par (iii) $ab = a.0 = 0 \in I$.

(c) Si $I = \{0\}$, les trois points sont vérifiés et $I = 0\mathbb{K}[X]$ est l'idéal principal engendré par 0.
On suppose dorénavant que $I \neq \{0\}$.

(d) L'ensemble $E = \{\deg(P) | P \in I \setminus \{0\}\}$ est non vide puisque $I \setminus \{0\} \neq \emptyset$. De plus ses éléments sont des entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, c'est donc le cas pour E.
On considère alors P_0 un polynôme de I tel que $\deg(P_0) = m$.

(e) On veut montrer que $P_0\mathbb{K}[X] \subset I$. Soit $U \in P_0\mathbb{K}[X]$, alors il existe $b \in \mathbb{K}[X]$ tel que $U = P_0 b$ soit le produit de $P_0 \in I$ et d'un élément b. Par (iii), $U \in I$.

(f) On veut montrer que $I \subset P_0\mathbb{K}[X]$. On procède par l'absurde. Si $U \in I \setminus P_0\mathbb{K}[X]$, on effectue la division euclidienne de U par P_0, on obtient $U = QP_0 + R$ avec $\deg(R) < \deg(P_0)$ et $R \neq 0$ puisque U n'est pas un multiple de P_0. Mais alors QP_0 appartient à I par (iii) et donc $R = U - QP_0$ appartient aussi à I par (ii). On obtient R dans $I \setminus \{0\}$ avec $\deg(R) < \deg(P_0)$, ce qui est une contradiction puisque P_0 est de degré minimal dans $I \setminus \{0\}$.

(g) On conclut que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal, d'après (c) si l'idéal est réduit à $\{0\}$, et d'après les deux questions précédentes dans le cas général où $I \setminus \{0\}$ est non vide.