UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)
ANNÉE : 2019-2020

Contrôle continu 2

Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par l'étudiant·e.
Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de traiter les questions suivantes.

Exercice 1. Soient a et b deux éléments d'un corps $\mathbb{K}$. On considère la matrice $D_{2n} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$ dont les entrées diagonales vallent a, les entrées "antidiagonales" vallent b et les autres entrées sont nulles :

$$D_{2n} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le déterminant de D_2, de D_4, et de D_6.
(b) Calculer par récurrence le déterminant de D_{2n}.

Exercice 2. On considère les deux polynômes réels

$$A = X^4 + 3X^3 + X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 - X^3 - X^2 + X.$$

(a) Déterminer le PGCD de A et B.
(b) Donner une relation de Bézout pour A et B.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de redémontrer le résultat du cours assurant que tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$ est principal, c'est-à-dire qu'il existe $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = P_0\mathbb{K}[X]$, où l'on note $P_0\mathbb{K}[X] = \{P_0Q | Q \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des multiples de P_0.
(a) Donner la définition d'un idéal I de $\mathbb{K}[X]$.
(b) Montrer que si I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, alors $0 \in I$.
(c) On suppose que $I = \{0\}$. Montrer que I est principal.
On suppose dorénavant que $I \neq \{0\}$.
(d) Justifier que l'ensemble $E = \{\deg(P) | P \in I \setminus \{0\}\}$ admet un minimum, noté $m = \min(E)$.
On considère alors P_0 un polynôme de I tel que $\deg(P_0) = m$.
(e) Montrer que $P_0\mathbb{K}[X] \subset I$.
(f) Montrer que $I \subset P_0\mathbb{K}[X]$.
(g) Conclure.