Licence 2 - 2019/2020

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Octobre 2019

Correction du Contrôle continu

Durée : 1h15 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. *Cours.* Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = a \times b$$

(Si vous souhaitez utiliser la décomposition en facteur premier, démontrer comment on peut calculer $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$ à l'aide des décompositions de a et b).

CORRECTION : *cf.* cours.

Exercice 2. Résoudre l'équation diophantienne :

$$(**) \qquad 54x + 42y = 72, \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

CORRECTION : Le pgcd de $54 = 2.3^3$ et $42 = 2.3.7$ est 6, qui divise $72 = 2^3.3^2$. L'équation possède donc des solutions, et est équivalente à l'équation suivante obtenue en divisant les deux membres de l'égalité par6 :

$$(\star) \qquad 9x + 7y = 12, \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Une identité de Bezout pour 7 et 9 peut-être calculée à la main. Par exemple : $-3.9 + 4.7 = 1$. On multiplie cette relation de Bezout par 12 pour obtenir une solution particulière $(x_0, y_0) = (-36, 48)$ à $(\star)$: $9.(-36) + 7.(48) = 12$
Soit maintenant $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est solution de } \star &\iff 9x + 7y = 12 \\ &\iff 9(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0 \iff 9(x - x_0) = 7(y_0 - y)\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gauss, puisque $\text{pgcd}(7, 9) = 1$, 7 divise $x - x_0$ et il existe k tel que $x = x_0 + 7k$. On en déduit : $9.7k = 7(y_0 - y) \implies y = y_0 - 9k$. Réciproquement, on vérifie que tous les couples $(x_0 + 7k, y_0 - 9k)$ conviennent. L'ensemble des solutions est donc :

$$\{(-36 + 7k, 48 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 3. Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\text{pgcd}(a, b) + \text{ppcm}(a, b) = b + 9.$$

(*Indication : Écrire $a = a'd$, $b = b'd$, où $d = \text{pgcd}(a, b)$, et traiter les différents cas possibles.*)

Correction : En suivant l'indication, on pose $a = a'd, b = b'd$ où $d = \text{pgcd}(a, b)$, et $\text{pgcd}(a', b') = 1$. Puisque $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$, on sait que $\text{ppcm}(a, b) = da'b'$. L'équation s'écrit donc :

$$d + da'b' = db' + 9 \iff \quad d(1 + b'(a' - 1)) = 9 \qquad (\star)$$

Le pgcd d divise donc 9, ce qui conduit aux trois possibilités suivantes :
Cas 1 **:** $d = 1$
L'équation $(\star)$ devient : $b'(a' - 1) = 8$
Si $b' = 8$, $a' = 2$ et $\text{pgcd}(a', b') = 2$, ce qui est impossible.
Si $b' = 4$, $a' = 3$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$, donc le couple $(a, b) = (3, 4)$ est une solution.
Si $b' = 2$, $a' = 5$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$, donc le couple $(a, b) = (5, 2)$ est une solution.
Si $b' = 1$, $a' = 9$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$, donc le couple $(a, b) = (9, 1)$ est une solution.
Cas 2 **:** $d = 3$
L'équation $(\star)$ devient : $b'(a' - 1) = 2$.
Si $b' = 2$, $a' = 2$ et $\text{pgcd}(a', b') = 2$, ce qui est impossible.
Si $b' = 1$, $a' = 3$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$, donc le couple $(a, b) = (9, 3)$ est une solution.
Cas 3 **:** $d = 9$
L'équation $(\star)$ devient : $b'(a' - 1) = 0$.
Puisque $b' \in \mathbb{N}^*$, on a forcément $a' = 1$ et tous les couples $(a, b) = (9, 9k), k \in \mathbb{N}^*$ conviennent.

En conclusion, l'ensemble des couples (a, b) solutions est :

$$\{(3, 5); (5, 2); (9, 1); (9, 3); (9, 9k), k \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 4. *Une équation diophantienne de degré* 2.

On souhaite résoudre l'équation diophantienne :

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = 3z^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$$

(1) Montrer qu'il suffit de chercher les triplets de solutions (x, y, z) premiers entre eux, c'est à dire tels que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

Correction : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ un triplet d'entier, $d = \text{pgcd}(x, y, z)$ son pgcd. On pose $x = dx', y = dy', z = dz'$ avec (x', y', z') premiers entre eux. En divisant l'équation par d^2 on observe que (x, y, z) est solution de $(*)$ si et seulement si (x', y', z') l'est.
Ainsi, connaître l'ensemble des triplets de solutions premiers entre eux donne l'ensemble de toutes les solutions, par multiplication par un nombre entier quelconque.

Dans la suite, nous noterons (x, y, z) un triplet d'entiers *premiers entre eux* solution de $(*)$.

(1) Montrer que l'on ne peut pas avoir simultanément $3|x$ et $3|y$. En déduire que ni x ni y ne sont multiples de 3.

CORRECTION : Écrivons $x = 3a, y = 3b$. On obtient $3^2(a^2 + b^2) = 3z^2$, donc $3(a^2 + b^2) = z^2$ et 3 divise z^2. Puisque 3 est premier, 3 divise z ce qui est exclu puisque $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.
Supposons maintenant que $3|x$, et écrivons $x = 3a$. Alors $y^2 = 3(z^2 - 2a^2)$, donc 3 divise y ; or on vient de démontrer que c'est impossible. De même, on ne peut avoir $3|y$.

(1) En considérant l'équation dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$.

CORRECTION : Les carrés de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont $\overline{0}^2 = \overline{O}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$et $\overline{-1}^2 = \overline{1}$. Puisque 3 ne divise ni x ni y, on a forcément $\overline{x}^2 = \overline{y}^2 = \overline{1}$. On a donc :

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{3}\overline{z}^2 \iff \overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \iff \overline{2} = \overline{0},$$

ce qui est faux. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble vide.