# Topologie produit : produits infinis

## Rappels sur les produits finis

(i) <u>produit de deux espaces métriques</u>

$(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques

$\rightsquigarrow$ $d_\infty, d_1, d_2$ des $\underbrace{\text{distances fortement équivalentes}}_{\text{elles définissent donc la même topologie}}$ sur le produit ensembliste $X \times Y$

(ii) <u>produit de deux espaces topologiques</u>

$(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques

$\rightsquigarrow$ la topologie produit sur $X \times Y$

* les parties $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$ sont des ouverts (appelés "ouverts de base")
* tout ouvert de $X \times Y$ est réunion (quelconque) d'ouverts de base

<u>rem</u> : c'est ainsi que l'on définit la topologie produit (on montre que cela fait bien une topologie sur $X \times Y$) et que, si $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ sont les topologies qui proviennent respectivement d'une distance $d_X$ sur $X$ et d'une distance $d_Y$ sur $Y$, alors cette topologie produit est la topologie définie par les distances $d_\infty, d_1, d_2$ sur $X \times Y$

On a les deux projections :

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$\pi_X(x,y) = x$

$\pi_X(x,y) = y$

On a montré les propriétés suivantes :

① $\pi_X$ et $\pi_Y$ sont continues

② Une application $Z \xrightarrow{f} X \times Y$ est continue si et seulement si $\pi_X \circ f$ et $\pi_Y \circ f$ sont continues

($Z$ : un autre espace top)

$$\begin{tikzcd} & & X \\ Z \arrow[r, "f"] \arrow[urr, dashed, bend left, "\pi_X \circ f"] \arrow[drr, dashed, bend right, "\pi_Y \circ f"'] & X \times Y \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

rem : le ① est donc un cas particulier du ② !
car on sait que $X \times Y \xrightarrow{id} X \times Y$ est continue...
(on prend donc $Z = X \times Y$ et $f = id$)

③ Une suite de points $(x_n, y_n)$ de $X \times Y$ converge vers $(x, y)$ dans $X \times Y$ (pour la topo produit) si et seulement si $x_n \to x$ dans $X$ et $y_n \to y$ dans $Y$

On sait faire le produit de <u>deux</u> espaces (métriques, topologiques) donc on sait faire le produit de trois, quatre, ..., d'un <u>nombre fini</u> d'espaces.

<u>Question</u> : et si on a une <u>infinité</u> d'espaces (métriques, topologiques) ?

leur produit ensembliste a un sens (! mais voir ci-dessous...), mais peut-on le munir d'une distance / d'une topologie de sorte à garder les propriétés ①-②-③ qui sont vraies (et bien utiles) pour les produits finis ?

## Produit ensembliste

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles   $I$ = ensemble d'indices

* Si $I$ est <u>fini</u> (de cardinal $n$), on peut supposer que $I = \{1, \dots, n\}$
  et on a $n$ ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$
* Si $I$ est <u>infini dénombrable</u>, on peut supposer que $I = \mathbb{N}^*$
  et on a une <u>suite</u> d'ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

Topo prod 2

* si $I$ est <u>infini non dénombrable</u> (p.ex $I = \mathbb{R}$), on n'a pas de manière particulière "d'organiser" notre famille d'ensembles (on ne peut pas les lister les uns après les autres) et on doit se contenter de dire que pour chaque indice $i \in I$ on s'est donné un ensemble $X_i$ ...

Le <u>produit ensembliste</u> $X = \prod_{i\in I} X_i$ est l'ensemble des familles d'éléments $(x_i)_{i\in I}$ telles que $x_i \in X_i$ pour tout $i \in I$.

* si $I = \{1, \dots, n\}$ $\quad X = X_1 \times \dots \times X_n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in X_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$

un élément de $X$ est un "<u>n-uplet</u>"

* si $I = \mathbb{N}^*$ $\quad X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times \dots$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ avec $x_i \in X_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$

un élément de $X$ est une <u>suite</u>

* si $I$ est infini non dénombrable, il n'y a pas de manière particulière de présenter un élément de $\prod_{i\in I} X_i$ ... c'est juste $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in X_i$ $\forall i$

(!) Si $X_i$ est le même ensemble (disons $A$) pour tous les $i \in I$, alors on peut voir $\prod_{i\in I} X_i$ comme l'ensemble $\mathcal{F}(I, A)$ de toutes les applications de $I$ dans $A$ :

se donner une application $x : I \to A$ c'est se donner une valeur $x(i) \in A$ pour chaque $i \in I$, autrement dit c'est se donner une famille $(x(i))_{i\in I}$ ...

<u>p.ex</u> si $I = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}$ : $\prod_{i\in I} \mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ensemble des applications (= fonctions) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Si les $X_i$ ne sont pas tous les mêmes : on peut considérer leur réunion $A = \bigcup_{i\in I} X_i$ et alors $\prod_{i\in I} X_i$ est le sous-ensemble de $\mathcal{F}(I, A)$ constitué des applications $f : I \to A$ telles que $f(i) \in X_i$ $\forall i \in I$ ...

Axiome du choix   il dit que si chacun des ensembles $X_i$ (pour $i \in I$) est non-vide, alors le produit ensembliste $\prod_{i\in I} X_i$ est également non-vide

(!) on peut "choisir" un élément $x_i \in X_i$ pour chaque $i \in I$

et cela "pour tous les $i \in I$ en même temps"

et obtenir ainsi un objet $(x_i)_{i\in I}$ qui appartient à $\prod_{i\in I} X_i$ ...

Projections   pour chaque $i \in I$, on a une projection $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$

qui "extrait" la $i$-composante d'un élément du produit :

$$\pi_i(x) = x_i \quad \text{si } x = (x_i)_{i\in I}$$

## (1) Produit dénombrable d'espaces métriques

On se donne une suite $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'espaces métriques

et on pose $X := \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times \dots$ leur produit ensembliste.

On sait que chaque distance $d_n$ est topologiquement équivalente à la distance

$\delta_n := \min(1, d_n)$, qui donne donc sur $X_n$ la même topologie que $d_n$.

Donc, quitte à remplacer $d_n$ par $\delta_n$, on peut supposer que $\boxed{0 \leq d_n \leq 1}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ éléments de $X = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$,

on pose alors $$\boxed{d(x,y) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}}$$

(!) ce qui est important c'est que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ soit une série convergente.

Topo prod 3

**Prop** $d$ est une distance sur $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$

**dém** d'abord $d(x,y)$ est un nombre réel, car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$

est convergente par le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n\geq 1 \\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \text{ converge} \end{array}\right) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \text{ converge}$$

ensuite on montre facilement les propriétés d'une distance :

(i) $d(x,y) \geq 0$ par définition

$d(x,x)=0$ aussi

et si $d(x,y)=0$ alors $\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}=0 \ \forall n\geq 1$, donc $d_n(x_n,y_n)=0 \ \forall n\geq 1$,

donc $x_n=y_n \ \forall n\geq 1$, donc $\underbrace{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}_{x} = \underbrace{(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}_{y}$

(ii) $d(y,x)=d(x,y)$ clair

(iii) $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

car pour chaque $n\geq 1$ on a $d_n(x_n,y_n)+d_n(y_n,z_n) \geq d_n(x_n,z_n)$

inég. $\Delta$ dans $(X_n,d_n)$

d'où $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} + \sum_{n\geq 1} \frac{d_n(y_n,z_n)}{2^n} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{d_n(x_n,z_n)}{2^n}$

en divisant par $2^n$ puis en faisant la somme pour $n\geq 1$.

**Prop.** Soit $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ une suite de points de $X=\prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$. Et soit $x\in X$...

Alors $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ dans $X$ pour la distance $d$

$\Leftrightarrow$ pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x_n$ dans $(X_n,d_n)$

(!) la convergence dans $X$ est donc la <u>convergence simple</u>

(comme dans $\mathbb{R}^2$, comme dans $\mathbb{R}^m$)

dém $\boxed{\Rightarrow}$ On a évidemment ~~$0 \leq \frac{d_n(x_n^{(k)}, x_n)}{2^n} \leq d(x^{(k)}, x)$~~

$$0 \leq \frac{d_n(x_n^{(k)}, x_n)}{2^n} \leq d(x^{(k)}, x) \quad \text{pour chaque } k \text{ et } n$$

(par définition de d...)

Donc si $d(x^{(k)}, x) \xrightarrow[k\infty]{} 0$, alors $d_n(x_n^{(k)}, x_n) \xrightarrow[k\infty]{} 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$

C'est-à-dire :

si $x^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x$ dans $(X,d)$, alors $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x_n$ dans $(X_n, d_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge, il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Il ne reste plus qu'à s'occuper des indices $n = 1, 2, \cdots, N$, qui sont en nombre fini ...

Pour chaque $n \in \{1, \cdots, N\}$, il existe un $K_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K_n$, $d_n(x_n^{(k)}, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$

(car $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x_n$ dans $(X_n, d_n)$)

Posons $K := \max(K_1, K_2, \cdots, K_N)$ un entier

Si $k \geq K$, on a alors :

$$d(x^{(k)}, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x_n^{(k)}, x_n)}{2^n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{d_n(x_n^{(k)}, x_n)}{2^n}}_{\leq \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{2N} \leq \frac{\varepsilon}{2N}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{d_n(x_n^{(k)}, x_n)}{2^n}}_{\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\leq N \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi $d(x^{(k)}, x) \xrightarrow[k\infty]{} 0$, autrement dit $x^{(k)} \rightarrow x$ dans $(X,d)$

Topo
prod
4

<u>Corollaire</u> ① chaque projection $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n \xrightarrow{\pi_n} X_n$ est continue

② $Y \xrightarrow{f} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ est continue $\iff$ chaque $\pi_n \circ f : Y \to X_n$ est continue

↑
un espace métrique

<u>rem</u> : on a vu que en fait ① est un cas particulier de ②...

<u>dém</u> ① conséquence immédiate de la proposition précédente, par la continuité séquentielle

② si $f$ est continue, alors $\pi_n \circ f$ est continue (composition d'applications continues)

et si chaque $\pi_n \circ f$ est continue :

soit $y^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} y$ dans $Y$

alors $\pi_n \circ f(y^{(k)}) \xrightarrow[k\infty]{} \pi_n \circ f(y)$ dans $(X_n, d_n)$ pour chaque $n \geq 1$

donc $f(y^{(k)}) \xrightarrow[k\infty]{} f(y)$ dans $(X,d)$ par la <u>proposition</u>

▨

<u>Exemple</u> ensemble de Cantor

on considère $X = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

un élément de $X$ = une suite de 0 et de 1

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \qquad x_n = 0 \text{ ou } 1$$

On munit chaque $\{0,1\}$ de la distance discrète $[d_n(0,1) = 1]$

(c'est aussi la distance usuelle si on voit $\{0,1\}$ comme partie de $\mathbb{R}$ usuel)

D'après ce qu'on vient de voir :

$x^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x$ dans $(X,d)$ $\iff$ $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x_n$ dans $\{0,1\}$ pour chaque $n \geq 1$

$\iff$ chaque suite $(x_n^{(k)})_k$ est <u>stationnaire</u>

↑
càd pour chaque $n \geq 1$

en effet : $\{0,1\}$ espace discret !

une suite de 0 et de 1 converge vers 0 ssi elle est constamment égale à 0 ~~xxxxxxxxxx~~ à partir d'un certain rang

[de m pour la cv vers 1]

l'ensemble de Cantor $C$ est une partie de $[0,1]$

c'est l'ensemble des nombres réels $x \in [0,1]$ qui peuvent s'écrire sous la forme $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$ avec $x_n = 0$ ou $2$ $\forall n$

<u>rem</u> tout nombre réel $x \in [0,1]$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$

avec $x_n = 0, 1$ ou $2$ pour tout $n$

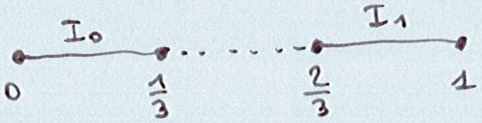
(!) (et certains ont deux écritures, p.ex $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^2} \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{3^2} \frac{3}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots$ )

<u>Quels sont</u> les nombres $x \in [0,1]$ qui s'écrivent $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$ avec $\boxed{x_1 = 0 \text{ ou } 2}$ ? (et $x_2, x_3, \ldots$ quelconques)

ce sont tous les $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$ = tous les $x \in [0, \frac{1}{3}]$

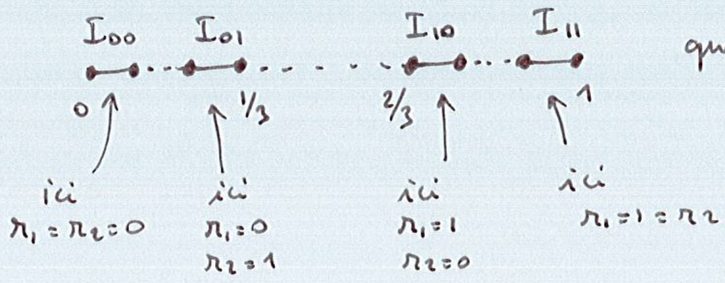
et tous les $\frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$ = tous les $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (!)




deux intervalles $I_0$ et $I_1$

<u>Quels sont</u> les nombres $x \in [0,1]$ qui s'écrivent $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n}$

avec $\boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \text{ ou } 2 \\ \text{et} \\ x_2 = 0 \text{ ou } 2 \end{matrix}}$ ? (!) et $x_3, x_4, x_5, \ldots$ quelconques ( c-à-d $\in \{0,1,2\}$ )




quatre intervalles $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$

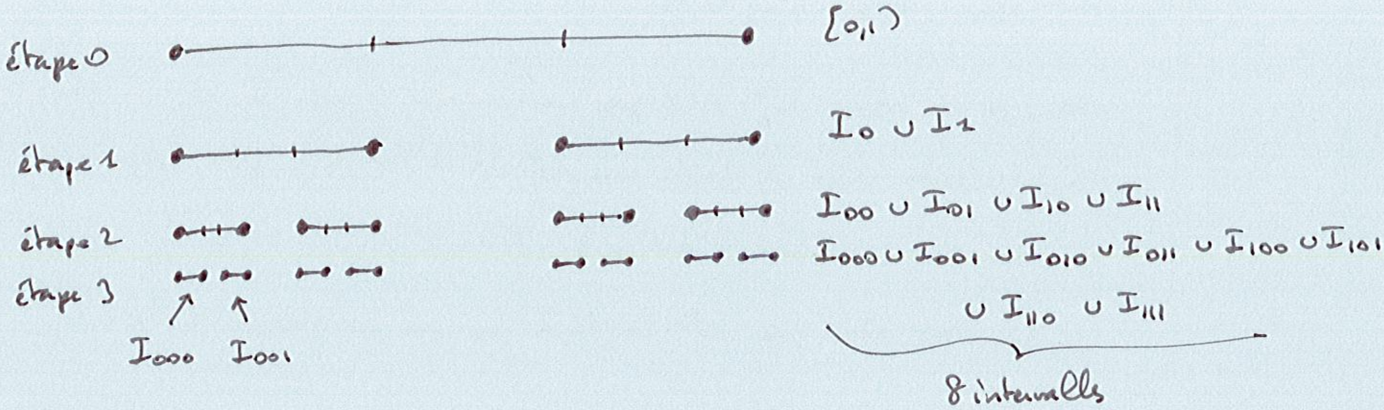
Topo prod 5

etc...

On est passé de $[0,1]$ à $I_0 \cup I_1$ en enlevant le "tiers du milieu" (ouvert) de l'intervalle $[0,1]$

On passe de $I_0 \cup I_1$ à $I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ en enlevant à chacun des deux intervalle $I_0$ et $I_1$ leur "tiers du milieu" (ouvert)

etc...




À l'étape $n$ :

$F_n$ = la réunion de $2^n$ segments (intervalls fermés bornés) de longueur $\frac{1}{3^n}$ chacun

L'ensemble de Cantor est l'intersection de tous ces $F_n$ :

$$\boxed{C = \bigcap_{n \geq 1} F_n}$$

(!) $C$ est un <u>compact</u> (intersection de compacts de $\mathbb{R}$ !)

(!) On munit $C$ de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

<u>important</u> : si $r, s \in C$ avec $r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{3^n}$, $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{3^n}$

où $r_n, s_n \in \{0,2\}$ $\forall n \geq 1$

(*)

alors <u>ou bien</u> $r_n = s_n$ pour tout $n \geq 1$, et donc $r = s$...

<u>ou bien</u> il existe un $N \geq 1$ tel que $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$, ..., $r_N = s_N$ <u>et</u> $r_{N+1} \neq s_{N+1}$

et dans ce cas $|r - s| \geq \frac{1}{3^{N+1}}$

$$\left[ |r-s| \geq \frac{2}{3^{N+1}} - \sum_{n=N+2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^{N+1}} - \frac{2}{3^{N+2}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3^{N+1}} - \frac{1}{3^{N+1}} = \frac{1}{3^{N+1}} \right]$$

On en déduit :

si $\left(r^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ est une suite de points de $C$

alors $r^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} r$ dans $C \iff \underbrace{\forall n \geq 1,\ \exists K_n \geq 1\ ;\ \forall k \geq K_n,\ r_n^{(k)} = r_n}$

càd toutes les suites $\left(r_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires

en effet : si $r_n^{(k)} \neq r_n$

alors $\left| r_n^{(k)} - r_n \right| \geq \frac{1}{3^{n+1}}$

donc si la suite $r_n^{(k)}$ n'est pas constamment égale à $r_n$ à partir d'un certain rang, il existe une infinité d'indices $k$ pour lesquels $r_n^{(k)} \neq r_n$

et donc une infinité d'indices $k$ tels que $\left| r^{(k)} - r \right| \geq \frac{1}{3^{n+1}}$,

ce qui veut dire que $r^{(k)}$ ne tend pas vers $r$ quand $r \to +\infty$

Conséquence : $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la ~~topologie produit~~ distance $d$

et $C$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$

sont homéomorphes

dém $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \xrightarrow{h} C$ est une bijection bicontinue

$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \longmapsto r = \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$

bijection : tout $r \in C$ s'écrit d'une et une seule manière sous la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{r_n}{3^n}$ avec $r = 0$ ou $2$

unicité : conséquence de (*) page précédente

bicontinuité : par la caractérisation séquentielle

si $x^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} x$, alors chaque suite $\left(x_n^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ est stationnaire,

donc chaque suite $\left(2x_n^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ est stationnaire...

donc $\underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{2x_n^{(k)}}{3^n}}_{\substack{r^{(k)} \\ \parallel \\ h(x^{(k)})}} \longrightarrow \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}}_{\substack{r \\ \parallel \\ h(x)}}$ dans $C$

et de m̂ en sens inverse :

si $r_m^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} r$ dans $C$, alors chaque suite $\left(r_m^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ est stationnaire,

donc chaque suite $\left(\frac{1}{2} r_m^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ est stationnaire,

donc $x^{(k)} = \left(\frac{1}{2} r_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow x = \left(\frac{1}{2} r_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

$\blacksquare$

## (2) Produit infini d'espaces topologiques

On va traiter de la même manière le cas "infini dénombrable" et le cas "infini non dénombrable", et observer que :

- dans le cas "infini dénombrable", il s'agit bien d'une extension de ce qu'on vient de faire : si les espaces topologiques considérés $(X_n, \mathcal{O}_n)$ sont des espaces métriques, alors la topologie produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ est la topologie qui provient de la distance $d$ construite en (1)
- dans le cas "infini non dénombrable", la situation est différente : un produit non dénombrable d'espaces topologiques $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ n'est <u>jamais métrisable</u> (pour peu que chaque $X_i$ contienne au moins 2 points...)

On se donne une famille $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ d'espaces topologiques, indexée par un ensemble $I$ (infini).

On considère le produit ensembliste $X = \prod_{i \in I} X_i$, avec les projections

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j \qquad (\text{pour } j \in I)$$

<u>exemple</u> : $I = \mathbb{R}$ et $X_i = \mathbb{R}$ pour tout $i$

Alors $\prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$x = (x_i)_{i \in \mathbb{R}}$ se voit comme une fonction $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \longmapsto x_i = x(i)$

La projection $\pi_j$ est tout simplement l'<u>évaluation en $j$</u> :

$$\pi_j(x) = x_j = x(j)$$

On cherche une topologie sur $\prod_{i \in I} X_i$ qui rende continue chacune des projections $\pi_i$.

Donc on veut que, pour chaque ouvert $U_j$ de $X_j$ (pour la topologie $\mathcal{O}_i$), l'image réciproque $\pi_j^{-1}(U_j)$ soit ouverte dans $X$ (pour la topologie que l'on cherche à définir).

Or $$\pi_j^{-1}(U_j) = \{ x = (x_i)_{i \in I} \; ; \; \pi_j(x) \in U_j \}$$
$$= \{ x = (x_i)_{i \in I} \; ; \; x_j \in U_j \}$$

c'est l'ensemble des éléments de $\prod_{i \in I} X_i$ dont la $j^{\text{ème}}$ composante appartient à $U_j$

On veut donc que chaque $\pi_j^{-1}(U_j)$ soit un ouvert de $X = \prod_{i \in I} X_i$ ...

donc il faut aussi que chaque <u>intersection finie</u> de tels ouverts soit un ouvert de $X$.

Topo prod 7

Si $j_1, \dots, j_m \in I$ (un nombre fini d'indices)

et $U_{j_1}$ ouvert de $X_{j_1}$, $U_{j_2}$ ouvert de $X_{j_2}, \dots,$ $U_{j_m}$ ouvert de $X_{j_m}$

alors

$$\underbrace{\pi_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap \pi_{j_m}^{-1}(U_{j_m}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \; ; \; x_{j_1} \in U_{j_1}, \dots, x_{j_m} \in U_{j_m}\}}$$

on appelle ceci

un "ouvert élémentaire" de $\prod_{i \in I} X_i$

= un "ouvert de base"

<u>Déf</u> : La <u>topologie produit</u> $\mathcal{O}$ sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ est la topologie dont les ouverts sont les réunions quelconques d'ouverts élémentaires

naturellement, il faut vérifier que ceci définit bien une topologie...

* si $j \in I$ indice quelconque

alors $\pi_j^{-1}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{un ouvert de } X_j}}{\emptyset}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \; ; \; \underbrace{x_j \in \emptyset}_{\text{impossible à réaliser...}}\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{... donc l'ensemble des tels } x \text{ est vide}}}{\emptyset}$

donc $\boxed{\emptyset \in \mathcal{O}}$

* si $j \in I$ indice quelconque

alors $\pi_j^{-1}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{un ouvert de } X_j}}{X_j}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \; ; \; \underbrace{x_j \in X_j}_{\text{tout } x_j \in X_j \text{ vérifie ceci...}}\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{... donc l'ensemble des tels } x \text{ est } X = \prod_{i \in I} X_i \text{ tout entier}}}{X}$

donc $\boxed{X \in \mathcal{O}}$

* une réunion quelconque de réunions quelconques d'ouverts élémentaires est évidemment une réunion quelconque d'ouverts élémentaires

donc $\boxed{\mathcal{O} \text{ est bien stable par réunions quelconques}}$

* pour montrer que toute intersection finie de réunions quelconques d'ouverts élémentaires est réunion d'ouverts élémentaires, il suffit ~~de montrer~~ d'observer que l'intersection de <u>deux</u> ouverts élémentaires est encore un ouvert élémentaire

si $j_1, \dots, j_n \in I$ et $U_{j_1} \in \mathcal{O}_{j_1}, \dots, U_{j_n} \in \mathcal{O}_{j_n}$

$k_1, \dots, k_p \in I$ et $V_{k_1} \in \mathcal{O}_{k_1}, \dots, V_{k_p} \in \mathcal{O}_{k_p}$

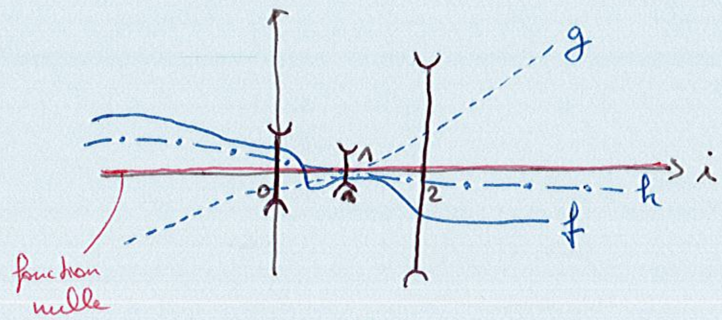
alors $\underbrace{\left[\pi_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_{j_n})\right]}_{\text{un ouvert élémentaire}} \cap \underbrace{\left[\pi_{k_1}^{-1}(V_{k_1}) \cap \dots \cap \pi_{k_p}^{-1}(V_{k_p})\right]}_{\text{un autre ouvert élémentaire}}$

est manifestement un ouvert élémentaire

<u>exemple</u> $I = \mathbb{R}$ $X_i = \mathbb{R}$ pour tout $i$ $X = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$U = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f(0) \in ]-1, 1[,\ f(1) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,\ f(2) \in ]-2, 2[ \}$

est un voisinage ouvert élémentaire de la fonction nulle




toutes les fonctions
dont le graphe passe par les trois I verticaux
appartiennent à $U$
p.ex. $f, g, h$ sur le dessin

Topo
prod 8

(!) par construction, $\mathcal{O}$ rend continues toutes les projections $\pi_i : X \to X_i$,

et c'est la plus petite topologie (= celle contenant le moins d'ouverts possible)

qui le fasse.

On dit que $\mathcal{O}$ est la <u>topologie la moins fine</u> qui rend les projections continues.

$\mathcal{O}$ est la <u>topologie de la convergence simple</u> :

p. ex. $I = \mathbb{R}$, $X_i = \mathbb{R}$ $\forall i$

(!) on va noter $f$ un élt de $\prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I}\mathbb{R}$ et plutôt $x$ au lieu de $i$...

$X = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

alors $f_k \xrightarrow[k\infty]{} f$ au sens de la topologie produit

$\Leftrightarrow$ pour tout voisinage ouvert $V$ de $f$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K$, $f_k \in V$

$\Leftrightarrow$ pour tout voisinage <u>élémentaire</u> $V$ de $f$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K$, $f_k \in V$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } \varepsilon > 0, \\ \text{il existe un } K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K, \ f_k(x) \in \left]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\right[ \end{cases}$

ceci est bien
la convergence simple
("point par point")
de $f_k$ vers $f$

<u>explication de la dernière équivalence</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors $V := \pi_x^{-1}(\left]\underset{f(x)}{-\varepsilon}, \underset{f(x)+\varepsilon}{\ }\right[)$ est un ouvert élémentaire de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

et "$f_k \in V$" signifie exactement : "$f_k(x) \in \left]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\right[$"

$\boxed{\Leftarrow}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $K$ tel que...

Soit $V$ un (voisinage) ouvert élémentaire (de $f$) : $V = \pi_{x_1}^{-1}(U_{x_1}) \cap \dots \cap \pi_{x_n}^{-1}(U_{x_n})$

$U_{x_1}$ : un voisinage ouvert de $f(x_1)$ dans $\mathbb{R}$ ... $U_{x_n}$ : un voisinage ouvert de $f(x_n)$ dans $\mathbb{R}$

on peut choisir $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ tels que $\begin{cases} ]f(x_1)-\varepsilon_1, f(x_1)+\varepsilon_1[ \subseteq U_{x_1} \\ \vdots \\ ]f(x_n)-\varepsilon_n, f(x_n)+\varepsilon_n[ \subseteq U_{x_n} \end{cases}$

(on pourrait même prendre le même $\varepsilon > 0$ partout, parce qu'il n'y en a qu'un nombre fini...)

par hypothèse : pour chaque $x_i \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_i > 0$, il existe un rang $K_i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K_i$, $f_k(x_i) \in ]f(x_i)-\varepsilon_i, f(x_i)+\varepsilon_i[ \subseteq U_{x_i}$

on prend $K := \max(K_1, \dots, K_n)$ [il n'y a qu'un nbre fini de $K_i$, donc $K$ est un nombre fini (pas $+\infty$)]

alors $\forall k \geq K$ et $\forall i = 1, \dots, n$, $f_k(x_i) \in ]f(x_i)-\varepsilon_i, f(x_i)+\varepsilon_i[ \subseteq U_{x_i}$

c'est-à-dire :

$$\forall k \geq K, \quad f_k \in \underbrace{\pi_{x_1}^{-1}(U_{x_1}) \cap \dots \cap \pi_{x_n}^{-1}(U_{x_n})}_{V}$$

ce que l'on voulait montrer.

<u>prop</u> L'espace topologique $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$, muni de la topologie produit, n'est pas métrisable.

(c'est-à-dire qu'il n'existe pas de distance sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui induise la topologie produit.)

<u>dém</u>. On montre que l'espace topologique $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne possède pas une certaine propriété des espaces métriques.

$A$ = l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \equiv 1$ sauf éventuellement en un <u>nombre fini</u> de points de $\mathbb{R}$

$\bar{0}$ = la fonction nulle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On affirme que <u>$\bar{0}$ appartient à l'adhérence de $A$</u> : si $V$ est un ouvert élémentaire contenant $\bar{0}$, alors $V = \pi_{x_1}^{-1}(U_{x_1}) \cap \dots \cap \pi_{x_n}^{-1}(U_{x_n})$ pour un certain nombre de pts $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ voisinages ouverts de $0$ dans $\mathbb{R}$, et donc la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ appartient à $A \cap V$.

<u>Mais aucune suite d'éléments de $A$ ne converge vers $\bar{0}$</u>

soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $A$

Topo prod 9

$F_k = \{ x \in \mathbb{R} ; f_k(x) \neq 1 \}$ $F_k$ est fini puisque $f_k \in A$...

donc $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ est dénombrable !

Or $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable... donc il existe un $x \in \mathbb{R} - \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \right)$

Soit $V := \pi_x^{-1} ( ]-1,1[ )$

$V$ est un voisinage ouvert de $\bar{0}$ dans $\mathcal{F}^c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ...

mais $f_k \notin V$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ car $f_k(x) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ !

Donc la suite $(f_k)$ ne converge pas vers la fonction nulle $\bar{0}$.

ccl : $\mathcal{F}^c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas métrisable

$\boxed{\checkmark / L}$