Feuille d'exercices 4 - Réponses numériques

1 - EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4. $\det(A) = 0$.

Exercice 5. Calculer les déterminants des matrices 3×3 suivantes :

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 100, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin(\gamma-\beta) + \sin(\alpha-\gamma) + \sin(\beta-\alpha),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 6. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 18 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 150,$$

$$\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Exercice 7.

Exercice 8.

$$P_{A_1}(X) = (1-X)(2-X)(3-X), \quad P_{A_2} = (2-X)(4-X)^2, \quad P_{A_3} = (2-X)^3$$

$$P_{A_4}(X) = (X-2)^2(X+2)^2, \quad P_{A_5} = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Exercice 9. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abcde, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 52, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 2 & 714 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & -3 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -210.$$

2 - EXERCICES CLASSIQUES

Exercice 10. Calculer les déterminants des matrices $n \times n$ suivantes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1), \qquad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = (n-1)^{n-1}(2n-1),$$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & \dots & . \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 11.

Exercice 12.