Correction du contrôle continu 1

Exercice 1. (a) Le spectre est l'ensemble des valeurs réelles λ pour lesquelles l'endomorphisme $f-\lambda\mathrm{id}$ est non-inversible, c'est-à-dire pour lesquelles il existe $v\in\mathbb{R}^3$ **non-nul** tel que $f(v)=\lambda v$.

⚠ Si on autorise $v=0$, alors toutes les valeurs réelles seraient des valeurs propres, puisqu'on a toujours $f(0)=\lambda 0$.

(b) On considère la matrice

$$A-\lambda I_3=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}(f)=\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

On effectue $L_1\leftarrow L_1+(3-\lambda)L_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix}0 & -2(2-\lambda) & (3-\lambda)(2-\lambda)\\ 0 & -\lambda & 1\\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

On effectue $L_1\leftarrow L_1-(3-\lambda)(2-\lambda)L_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

où $x=-2(2-\lambda)+\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)=(2-\lambda)[-2+\lambda(3-\lambda)]=(2-\lambda)(-2+3\lambda-\lambda^2)=(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$. Cette matrice est de rang 3 (donc inversible) si et seulement si $x\neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(f)=\{1,2\}$.

(c) Pour $E_1=\ker(f-\mathrm{id})$, on cherche le noyau de la matrice

$$A-I_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

On obtient $E_1=\mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

De même, on obtient $E_2=\mathrm{vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

⚠ Il s'agit de techniques de calcul de L1, il est indispensable de savoir le faire !

(d) Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut la dimension de l'espace ambiant. Ici $\dim(E_1)=\dim(E_2)=1$, donc la somme vaut 2 alors que l'espace ambiant est $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

(e) On montre d'abord que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Pour cela on considère une combinaison linéaire nulle $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$. Avec les coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

On résout pour obtenir $\lambda = \mu = \nu = 0$.
⚠Attention la notion de colinéarité ne permet pas de conclure ici. La colinéarité relie **deux** vecteurs, pas 3. Il s'agit là encore de questions de L1. Il est indispensable de savoir le faire.

Pour en déduire que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de remarquer que c'est une famille de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Étant libre, elle est une base.

(f) La matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de $f(v_i)$ **dans la base** $\mathscr{B}'$ (et pas dans la base canonique).
On a $Av_1 = v_1$ parce que $v_1 \in E_1$, et de même $Av_2 = 2v_2$ parce que $v_2 \in E_2$. Il reste à trouver les coordonnées (α, β, γ) de Av_3 dans $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire les scalaires tels que $Av_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.
Avec les coordonnées (dans la base canonique), on obtient le système :

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui se résout en $\alpha = \beta = -1$ et $\gamma = 2$.
On conclut que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

NB : on devait avoir $\gamma \in \{1, 2\}$ car sur la diagonale de la matrice triangulaire, on trouve exactement les valeurs propres de la matrice T, donc de l'endomorphisme associé f.
Par changement de base, on a $P^{-1}AP = T$ où $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ est la matrice de changement de base dont les colonnes sont les coordonnées de (v_1, v_2, v_3) dans la base conanique, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(g) On calcule le vecteur

$$Au_3 - 2u_3 = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2v_2 \neq 0.$$

Ce vecteur est dans E_2 d'après la réponse à la question (b). On conclut que $Au_3 - 2u_3 \in E_2 \setminus \{0\}$.

(h) En déduire une base $\mathscr{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que

$$J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de trouver trois vecteurs formant une base tels que $Au_1 = u_1$ qui équivaut à $u_1 \in E_1$, et $Au_2 = 2u_2$ qui équivaut à $u_2 \in E_2$ et $Au_3 = u_2 + 2u_3$ qui équivaut à $Au_3 - 2u_3 = u_2$. Si on prend le u_3 donné dans l'énoncé, qu'on pose $u_2 := Au_3 - 2u_3 = 2v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors on a bien la troisième égalité et aussi la deuxième puisque ce u_2 est bien dans E_2 d'après la question précédente. Enfin, on prend $u_1 = v_1$ par exemple qui est bien dans u_1.
On vérifie que ces trois vecteurs forment bien une base de $\mathbb{R}^3$ (même méthode qu'au (e)). et on obtient que $\mathscr{B}'' = (v_1, 2v_2, u_3)$ est bien une base comme on cherchait.
(Ce n'est pas la seule réponse possible, par example toutes les bases de la forme $\mathscr{B}'' = (av_1, 2bv_2, bu_3)$ pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ conviendraient aussi.)

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour toute valeur propre λ de f, on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{id}).$$

Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.

(a) D'après le cours tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Donc f est diagonalisable.

(b) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de f. Comme f est diagonalisable, on a $\sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}) = n$. De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) \geqslant 1$ (puisque les λ_i sont des valeurs propres), cela force $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \dim(E_{\lambda_i}) = 1$.
⚠Attention, si l'on ne mentionne pas que $\dim(E_{\lambda_i}) \geqslant 1$, c'est faux, puisque ce n'est pas parce que la somme de n nombres entiers vaut n que chacun d'eux vaut 1 (on pourrait avoir n une fois et 0 pour les $n-1$ autres entiers).

(c) Montrer que $g\left(E_\lambda(f)\right) \subset E_\lambda(f)$.
Soit $v \in g\left(E_\lambda(f)\right)$. Alors il existe $w \in E_\lambda(f)$, c'est-à-dire $f(w) = \lambda w$, tel que $v = g(w)$. On calcule alors

$$f(v) = f(g(w)) = g(f(w)) = g(\lambda w) = \lambda g(w) = \lambda v, \text{ donc } v \in E_\lambda(f).$$

La deuxième égalité ci-dessus utilise l'hypothèse de commutation entre f et g, la quatrième la linéarité de g.

(d) Montrer que si $v \in E$ est un vecteur propre de f, alors v est un vecteur propre de g.
C'était la question la plus dure. Comme v est un vecteur propre de f, on a $v \in E_\lambda(f)$ pour un certain λ. Alors le vecteur $g(v)$ appartient aussi à $E_\lambda(f)$ d'après la question précédente, et ce sous-espace est de dimension 1 d'après la question (b). Cela implique que $g(v)$ est colinéaire à v, donc $g(v) = \mu v$ pour un certain μ réel. Notez que la colinéarité peut s'écrire dans ce sens (et pas seulement $v = \mu' g(v)$) car $v \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre).
Cela montre que v est un vecteur propre de g pour une valeur propre μ (en général différente de λ).
⚠On ne peut pas montrer que $\mu = \lambda$ car c'est faux. Par exemple, si on prend $g = \mathrm{id}$, alors g commute bien à f (on a $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f$), mais avec une seule valeur propre, et ce quel que soit l'endomorphisme f choisi.

(e) Montrer que g est diagonalisable.
On a vu que f est diagonalisable, donc E admet une base $\mathscr{B}$ formée de vecteurs propres de f. Ceux-ci sont aussi des vecteurs propres de g, donc $\mathscr{B}$ est une base formée de vecteurs propres de g. Donc g est diagonalisable.

⚠Il ne suffisait pas de dire que f admet n vecteurs propres, mêmes distincts. En effet, dés qu'il y a un vecteur propre v, il y a une infinité de vecteurs propres distincts (tous ceux non-nuls colinéaires à v). Il était essentiel de parler de base.