UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)
ANNÉE : 2019-2020

Contrôle continu 1

Date : 23 octobre 2018
Durée : 1h30

Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par l'étudiant·e.
Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Donner la définition du spectre $\mathrm{Sp}(f)$ de f.
(b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$.
(c) Donner une base de $E_1 = \ker(f - \mathrm{id})$ et une base de $E_2 = \ker(f - 2\mathrm{id})$.
(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(e) On considère les quatre vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}'$.
(f) Déterminer la matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$, et donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$.
(g) Montrer que $Au_3 - 2u_3 \in E_2 \setminus \{0\}$.
(h) En déduire une base $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que

$$J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour toute valeur propre λ de f, on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\mathrm{id}).$$

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.

(a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(b) Justifier que $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
(c) Montrer que $g\left(E_\lambda(f)\right) \subset E_\lambda(f)$.
(d) Montrer que si $v \in E$ est un vecteur propre de f, alors v est un vecteur propre de g.
(e) Montrer que g est diagonalisable.