Topo V-1

V. Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

un espace de Banach = un espace vectoriel normé <u>complet</u>.

① Espaces vectoriels normés

rappels E un espace vectoriel (ev) réel ou complexe

une <u>norme</u> sur E = une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} N(x) \geq 0 & \forall x \in E \\ N(x) = 0 \iff x = 0_E & \forall x \in E \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)} \ \forall x \in E \\ N(x+y) \leq N(x) + N(y) & \forall x, y \in E \end{cases}$$

toute norme N sur E définit une <u>distance</u> sur E :

$$d(x,y) := N(x-y)$$

un <u>espace vectoriel normé</u> (evn) = un espace vectoriel E muni d'une norme N

(!) un espace vectoriel normé est donc un cas <u>particulier</u> d'espace métrique et même <u>très</u> particulier...

deux normes N et N' sur E sont <u>équivalentes</u> s'il existe $\alpha, \beta > 0$

tels que $\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x) \quad \forall x \in E$

(!) les distances associées à deux normes équivalentes sont <u>fortement équivalentes</u>

$$d(x,y) = N(x-y) \qquad d'(x,y) = N'(x-y)$$

si $\alpha N \leq N' \leq \beta N$, alors $\underbrace{\alpha\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta\, d(x,y) \quad \forall x, y \in E}_{\text{donc } d \text{ et } d' \text{ fortement équivalentes}}$

exemples d'evn $\mathbb{R}$ avec $|\cdot|$ valeur absolue $\qquad \mathbb{C}$ avec $|\cdot|$ module

$\mathbb{R}^n$ avec $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ (!) on a vu (chapitre Compacité) que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_\infty$ fonctions bornées (X ensemble quelconque) $\qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$

$C^0([0,1], \mathbb{R})$ avec $\underbrace{\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2}_{\text{ces normes ne sont pas équivalentes (!)}}$ $\qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}$

ℓ^∞ ensemble des suites bornées de nombres réels $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ℓ^1 ensemble des suites (u_n) telles que $\sum |u_n|$ converge $\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

ℓ^2 ensemble des suites (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2}$

Suites et séries dans un evn

Un evn $(E, \|.\|)$ est un espace métrique, donc on sait déjà ce qu'est la convergence des suites : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ si (déf) $d(x_n, x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

$\iff \|x_n - x\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Comme E est un <u>espace vectoriel</u>, on a de plus la notion de <u>série</u> convergente :

si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E,

on dit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est <u>convergente</u>, de somme $a \in E$

si (déf) $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k}_{\text{la somme partielle d'ordre } n} \xrightarrow[n\infty]{} a$

(bien définie, car c'est une somme finie)

<u>exemple</u> $E = M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ c'est un ev de dimension finie (n^2)

donc toutes les normes y sont équivalentes

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

On montre que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge

Sa somme est l'<u>exponentielle</u> de A :

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

Pour montrer la convergence, on peut utiliser n'importe quelle norme (elles sont toutes équivalentes)

On choisit une <u>norme matricielle</u> : c'est une norme $\|.\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$

telle que $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

(voir plus loin dans le chapitre)

On montre alors que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right)_{m \geq 0}$

est une <u>suite de Cauchy</u> de $M_n(\mathbb{R})$

(!) On verra plus loin que $M_n(\mathbb{R})$ est <u>complet</u>, en tant qu'espace vectoriel normé de dimension finie, donc cette suite de Cauchy est convergente...

en effet : si $m \geq 0$ et $p \geq 1$

$$\left\| \sum_{k=0}^{m+p} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{A^k}{k!} \right\|$$

inég Δ

$$\leq \sum_{k=m+1}^{m+p} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$$

norme

$$= \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{\|A^k\|}{k!}$$

norme <u>matricielle</u>

$$\leq \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

on reconnait le reste d'ordre m de la série convergente <u>réelle</u>

$$\exp(\|A\|) = \sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Comme cette série converge, ce reste tend vers 0 lorsque $m \longrightarrow +\infty$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N, \forall p \geq 0, \left\| \sum_{k=0}^{m+p} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| < \varepsilon$

c-à-d la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right)_{m \geq 0}$ est de Cauchy,

ce que l'on voulait démontrer...

Sous-espace vectoriel normé Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F hérite de la norme de E et devient lui-même un espace vectoriel normé ...

exemple (X,d) espace métrique compact (plus généralement espace top compact...)

$E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ fonctions bornées $X \to \mathbb{R}$

$F = C^0(X, \mathbb{R})$ fonctions continues $X \to \mathbb{R}$

On a vu (chapitre Compacité) que $C^0(X,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$

Donc $F \subseteq E$, et F est bien aussi un sous-espace vectoriel de F

(la somme de deux fonctions continues est continue, le produit d'une fonctions continue par un scalaire est continue)

D'où $\big(C^0(X,\mathbb{R}), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{norme induite}}}{\|\cdot\|_\infty}\big)$ qui est un sous-espace normé de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Produit d'espaces vectoriels normés

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés.

On peut munir $E \times F$ de plusieurs normes naturellement associées à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$:

$$\begin{cases} \|(x,y)\|_\infty := \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \\ \|(x,y)\|_1 := \|x\|_E + \|y\|_F \\ \|(x,y)\|_2 := \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2} \end{cases}$$

(!) ces trois normes sont équivalentes :

$$\boxed{\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\,\|(x,y)\|_2}$$

exercice !

Topo
V-3

Dans le cas des espaces métriques, on a vu deux notions différentes de "distances équivalentes" :

* notion faible : deux distances sont équivalentes si elles définissent la m̂ topologie (= elles ont les m̂ ouverts)

* notion forte : il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$

On pourrait s'attendre à retrouver cette distinction dans le cas des espaces vectoriels normés, mais en fait non : c'est ce que dit le résultat suivant ...

<u>Prop</u> Soit E un ev. Soient N et N' deux normes sur E.
Alors ~~...~~ N et N' sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie

<u>dém</u> $\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu : si N et N' sont des normes équivalentes, alors les distances associées d et d' sont fortement équivalentes, donc topologiquement équivalentes, donc les topologies sont les mêmes.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que N et N' définissent la m̂ topologie.

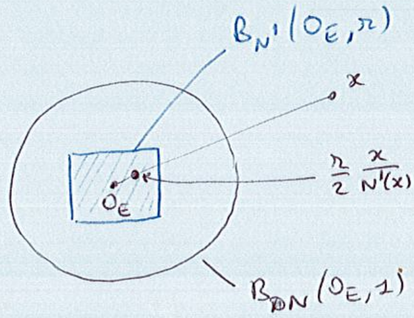
On sait que $\underbrace{B_N(0_E, 1)}_{\text{la boule unité ouverte pour } N}$ est un ouvert pour N, donc c'est aussi un ouvert pour N'.

Comme $0_E \in B_N(0_E, 1)$, c'est qu'il existe un $r > 0$ tel que $B_{N'}(0_E, r) \subseteq B_N(0_E, r)$

Soit $x \in E$ non nul.

Alors $\frac{r}{2} \frac{x}{N'(x)}$ appartient à $B_{N'}(0_E, r)$:

$$N'\left(\frac{r}{2} \frac{x}{N'(x)}\right) = \frac{r}{2N'(x)} N'(x) = \frac{r}{2} < r$$



Donc $\frac{r}{2} \frac{x}{N'(x)}$ appartient aussi à $B_N(0_E, 1)$

d'où $N\left(\frac{r}{2} \frac{x}{N'(x)}\right) < 1$

et par conséquent $\underbrace{N(x) < \frac{2}{r} N'(x)}_{\text{ceci est vrai pour tout } x \neq 0_E}$

donc

pour $x = 0_E$ on a évidemment $N(x) = N'(x) = 0$ ...

Donc $N(x) \leq \frac{\pi}{2} N'(x)$ pour tout $x \in E$

inégalité large pour accepter le vecteur nul

On a donc trouvé un $\alpha > 0$ tel que $N(x) \leq \alpha N'(x)$ $\forall x \in E$

De même dans l'autre sens : on échange les rôles de N et N' et on obtient $\beta > 0$

tel que $N'(x) \leq \beta N(x)$ $\forall x \in E$.

Donc N et N' sont équivalentes.

Continuité des opérations dans un evn

On a déjà remarqué que, pour un evn (réel) $(E, \|\cdot\|)$, les applications

$$\begin{array}{ccc} E \longrightarrow \mathbb{R} & E \times E \longrightarrow E & \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \|x\| & (x,y) \longmapsto x+y & (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \end{array}$$

sont continues

* la norme est 1-lipschitzienne, donc continue :

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$$

(deuxième inégalité triangulaire pour une norme)

* si $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\infty]{} (x,y)$ dans $E \times E$

alors $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans E et $y_n \xrightarrow[n\infty]{} y$ dans E

d'où

$$\|(x+y) - (x_n+y_n)\| = \|(x-x_n) + (y-y_n)\|$$

$$\leq \underbrace{\|x-x_n\|}_{\xrightarrow{n\infty} 0} + \underbrace{\|y-y_n\|}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

ainsi $x_n + y_n \xrightarrow[n\infty]{} x+y$

(continuité séquentielle de l'addition)

(!) Comme toujours, si on ne dit rien de plus c'est que $E \times E$ est muni de l'une des trois normes $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ associées à $\|\cdot\|$, on sait qu'elles sont équivalentes, et on a vu que

$(x_n, y_n) \to (x,y)$ dans $E \times E$ pour $\|\cdot\|_\infty$ (p.ex) $\iff \begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$ pour $\|\cdot\|_E$

* de même : si $(\lambda_n, x_n) \xrightarrow[n\infty]{} (\lambda, x)$ dans $\mathbb{R} \times E$

alors $\lambda_n \xrightarrow[n\infty]{} \lambda$ dans $\mathbb{R}$ et $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans E

d'où

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| = \|\lambda x - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda_n x_n\| \leq \underbrace{|\lambda - \lambda_n|}_{\xrightarrow{n\infty} 0} \underbrace{\|x\|}_{\text{constant}} + \underbrace{|\lambda_n|}_{\xrightarrow{n\infty} |\lambda|} \underbrace{\|x - x_n\|}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

donc $\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$

donc $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$ dans E (continuité séquentielle de la multiplication par les scalaires)

Topo
V - 4

Prop Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E

dém Soient $x, y \in \overline{F}$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F qui converge vers x

et —— $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ —— vers y

Alors $\underbrace{\alpha x_n + \beta y_n}_{\substack{\in F \\ \text{car } F \text{ sev de } E}} \xrightarrow[n\infty]{} \alpha x + \beta y$ par continuité des opérations.

Donc $\alpha x + \beta y$ est la limite d'une suite de points de F, donc appartient à $\overline{F}$.

Donc $\overline{F}$ est stable par combinaison linéaire, donc c'est un sev de E

$\boxed{///}$

Image directe et réciproque d'une norme par un isomorphisme

Supposons que E et F soient des espaces vectoriels <u>isomorphes</u>,

et choisissons un isomorphisme $E \xrightarrow{\phi} F$ (= une application linéaire bijective).

① Si N_F est une norme sur F, alors $N_E := N_F \circ \phi$ est une norme sur E

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "N_E := N_F \circ \phi"'] & F \arrow[d, "N_F"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

dém :

* $N_E(x) \geq 0$ comme N_F
  et si $N_E(x) = 0$ alors $N_F(\phi(x)) = 0$
  d'où $\phi(x) = 0_F$ puisque N_F est une norme sur F
  et donc $x = 0_E$ puisque ϕ est un <u>isomorphisme</u>.

* $N_E(\lambda x) = N_F(\phi(\lambda x))$ ↓ car ϕ linéaire
  $= N_F(\lambda \phi(x))$ ↓ car N_F norme
  $= |\lambda|\, N_F(\phi(x))$
  $= |\lambda|\, N_E(x)$

* $N_E(x + x') = N_F(\phi(x + x'))$ ↓ car ϕ linéaire
  $= N_F(\phi(x) + \phi(x'))$ ↓ car N_F norme
  $\leq N_F(\phi(x)) + N_F(\phi(x'))$
  $= N_E(x) + N_E(x')$

$\boxed{///}$

② De même : si N_E est une norme sur E, alors $N_F := N_E \circ \phi^{-1}$

est une norme sur F

(même démonstration)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "N_E"'] & F \arrow[d, dashed, "N_F := N_E \circ \phi^{-1}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

⚠ Supposons que N_E (norme sur E) et N_F (norme sur F) soient ainsi reliées entre elles par l'isomorphisme ϕ. Alors ϕ est une <u>isométrie linéaire</u> de (E, N_E) sur (F, N_F).

c'est-à-dire une application linéaire bijective (un isomorphisme) <u>qui préserve les normes</u> (c'est le cas ici par définition !)

$$\underbrace{N_F(\phi(x))}_{\text{norme de } \phi(x) \text{ dans } F} = \underbrace{N_E(x)}_{\text{norme de } x \text{ dans } E} \quad \forall x \in E$$

En particulier ϕ est un homéomorphisme entre (E, N_E) et (F, N_F).

<u>exemple fondamental</u> : soit E un espace vectoriel de <u>dimension finie n</u>. Alors tout choix de base $(e_1, \dots, e_n)$ de E induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{\ \phi\ } E \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

Par conséquent toute norme N_E sur E peut être "tirée en arrière" par ϕ et donne une norme N sur $\mathbb{R}^n$, en posant $N(x_1, \dots, x_n) := N_E(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$ comme on vient de le faire ci-dessus, et alors $(\mathbb{R}^n, N) \xrightarrow{\phi} (E, N_E)$ est une isométrie linéaire.

<u>Théorème</u> Sur un espace vectoriel <u>de dimension finie</u>, toutes les normes sont équivalentes

<u>dém</u> On a déjà démontré que toutes les normes <u>sur $\mathbb{R}^n$</u> sont équivalentes (chapitre Compacité). Grâce aux remarques qui précèdent, on va en déduire que c'est encore vrai pour un ev quelconque de dimension finie.

Soit E un ev de dim finie. On choisit un isomorphisme $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} E$ comme ci-dessus (via le choix d'une base de E).

Soient N_E et N'_E deux normes sur E.

Alors $N := N_E \circ \phi$ et $N' := N'_E \circ \phi$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$.

Donc elles sont équivalentes (!)

i.e. il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N(x_1, \dots, x_n) \leq N'(x_1, \dots, x_n) \leq \beta N(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

c'est-à-dire tels que

$$\alpha N_E(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \leq N'_E(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \leq \beta N_E(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Or tout vecteur $x \in E$ s'écrit (de manière unique) sous la forme

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ...

Donc $\alpha N_E(x) \leq N'_E(x) \leq \beta N_E(x) \quad \forall x \in E$

Autrement dit, les normes N_E et N'_E sont équivalents.

$\blacksquare$

Corollaire Soit (E, N) un espace vectoriel normé <u>de dimension finie</u>.

Alors (i) (E, N) est complet

(ii) les parties compacts de E sont exactement les parties fermés et <u>bornées</u> pour N

(iii) toute <u>suite bornée</u> de points de E possède une sous-suite ~~[illegible]~~ convergente.

dém On sait que ceci est vrai pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de ~~[illegible]~~ la norme $\|\cdot\|_\infty$

Donc c'est vrai pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme, car elles sont toutes équivalentes :

(i) des normes équivalentes donnent la même topologie et la même notion de suite de Cauchy, donc la même notion de complétude

(ii) des normes équivalentes donnent la même topologie donc la même notion de "partie compacte" et "partie fermée", et elles donnent aussi la même notion de "partie bornée" (toute partie bornée pour une norme est aussi bornée pour l'autre)

(iii) idem

Si (E, N_E) est un evn de dimension finie quelconque,

on sait qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ $(n = \dim E)$

et un isomorphisme $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} E$

tel que ϕ soit une <u>isométrie</u>.

les propriétés (i) - (ii) - (iii) étant vrais sur $\mathbb{R}^n$ pour la norme N,

elles sont donc vrais pour (E, N_E), car ces propriétés sont préservées

par une isométrie (!)

(i) une isométrie préserve la notion de suite de Cauchy :

$(x_k)_k$ suite de Cauchy de $\begin{pmatrix}\mathbb{R}^n \\ N\end{pmatrix} \Leftrightarrow (\phi(x_k))_k$ suite de Cauchy de (E, N_E)

et préserve la notion de suite convergente :

$x_k \xrightarrow[k\infty]{} x$ dans $(\mathbb{R}^n, N)$ $\underset{\text{car } \phi \text{ homéo}}{\Leftrightarrow}$ $\phi(x_k) \xrightarrow[k\infty]{} \phi(x)$ dans (E, N_E)

donc $(\mathbb{R}^n, N)$ complet $\Rightarrow (E, N_E)$ complet :

si (y_k) est une suite de Cauchy de (E, N_E)

alors $(\phi^{-1}(y_k))$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^n, N)$ (car ϕ isométrie)

donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi^{-1}(y_k) \xrightarrow[k\infty]{} x$ (complétude de $(\mathbb{R}^n, N)$)

donc $\underbrace{\phi(\phi^{-1}(y_k))}_{= y_k} \longrightarrow \phi(x)$ dans (E, N_E) (car ϕ continue)

donc la suite (y_k) converge dans (E, N_E)

(ii) de m : une isométrie préserve la notion de partie compacte / de partie fermée (c'est un homéomorphisme) et la notion de partie bornée (une isométrie préserve les distances)

Donc si $A \subseteq E$:

A compact de $E \Leftrightarrow \phi^{-1}(A)$ compact de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \phi^{-1}(A)$ fermée bornée dans $(\mathbb{R}^n, N)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\phi(\phi^{-1}(A))}_{= A}$ fermée bornée dans (E, N_E)

(iii) idem.

Topo
V - 6

Corollaire Soit E un espace vectoriel normé (de dimension quelconque) et soit F un sous-espace vectoriel <u>de dimension finie</u>. Alors F est fermé dans E

dém Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de F telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans E

C'est une suite convergente de points de E, donc c'est une suite de Cauchy de E (!)

Donc c'est aussi une suite de Cauchy du sous-espace vectoriel normé F (la norme sur F est la restriction de la norme sur E). Or F est de dimension finie, donc cet evn est <u>complet</u>. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F, donc (par unicité de la limite) $x \in F$.

Donc F est (séquentiellement) fermé.

▨

Rem En dimension infinie, on peut trouver des sous-espaces non fermés

exemple $E = \ell^\infty$ avec $\|\cdot\|_\infty$

F = ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang (un sev de E)

On a vu (Feuille TD2) que F n'est pas fermé dans E

Théorème (Riesz) Si E est un espace vectoriel normé <u>de dimension infinie</u>, alors la boule unité fermée n'est pas compacte

dém par contraposition : $D(0_E, 1)$ compacte $\Rightarrow$ $\dim E < \infty$

On suppose que $D(0_E, 1)$ est compacte. On peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$:

$$D(0_E, 1) \subseteq B(x_1, \tfrac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_n, \tfrac{1}{2})$$

On va montrer qu'alors $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (!) et donc que E est de dimension finie, ce qu'on voulait montrer

Pour cela, posons $F := \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$

Alors F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, donc il est <u>fermé dans</u> E,

(!) et par conséquent pour montrer que $E = F$ il suffit de montrer que $d(x, F) = 0$

pour tout $x \in E$

[car $d(x,F) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de manière générale}}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{F} \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ fermé}}}{\Leftrightarrow} x \in F$]

Soit $x \in F$. Posons $d := d(x, F) = \inf \{ \|x - y\| \,;\, y \in F \}$

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que $\alpha d < 1$ ↖ pour utiliser le recouvrement fini de la boule unité...

Il existe alors $y \in F$ tel que

$$\alpha \|x - y\| < 1$$

donc tel que $\alpha(x - y) \in D(0_E, 1)$.

D'où un $x_k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tel que $\alpha(x-y) \in B(x_k, \frac{1}{2})$

ce qui donne $\| \alpha x - \alpha y - x_k \| < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \alpha \| x - \underbrace{(y - \tfrac{1}{\alpha} x_k)} \| < \frac{1}{2}$$

(!) appartient à F car $y, x_k \in F$ et F <u>sous-espace vectoriel</u>

Et donc $\alpha d < \frac{1}{2} \ldots$

Ainsi $\alpha d < 1 \Rightarrow \alpha d < \frac{1}{2}$, ou encore $d < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow d < \frac{1}{2\alpha}$

donc $d < \frac{1}{2(2\alpha)}$ puis $d < \frac{1}{2.2.2\alpha}$ etc...

donc $d = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

$\boxed{///\,4}$

Topo
V-7

② Applications linéaires continues

On s'intéresse particulièrement aux applications <u>linéaires</u> entre deux espaces vectoriels normés...

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

<u>Prop</u> Il y a équivalence entre :

(i) u est continue sur E

(ii) u est continue en 0_E

(iii) il existe un réel $M > 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$

<u>dém</u> On montre ~~xxxxxxxx~~ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii) évident

(ii) $\Rightarrow$ (iii) on suppose u continue en 0_E $\qquad u(0_E) = 0_F$ (u est <u>linéaire</u>)

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, ; \, \|x\|_E < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_F < \varepsilon$

par exemple pour $\varepsilon = 1$: il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_F < 1$

Alors, si $x \in E$ est non nul :

$$\left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E = \frac{\delta}{2} < \delta \, , \text{ donc } \underbrace{\left\| u\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F < 1}_{\text{c'est-à-dire}}$$

$$\frac{\delta}{2\|x\|_E} \|u(x)\|_F < 1$$

Ainsi $\forall x \in E \, , \, \|u(x)\|_F \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_E$

égalité pour $x = 0_E$
inég. stricte pour $x \neq 0_E$

(iii) $\Rightarrow$ (i) si $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$

alors u est M-lipschitzienne :

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E$$

donc u est continue sur E.

//

Rem Les applications linéaires continues entre evn sont donc toutes lipschitziennes, donc uniformément continues.

Exemples

① $E = \mathbb{R}[X]$ ev des polynômes à coeff réels $(\dim E = \infty)$

si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in E$

on pose $\|P\|_\infty := \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$ — on montre facilement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ — exo

Soit Δ la dérivation :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \Delta(P) = P' \end{array} \qquad \Delta(a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n) = a_1 + 2a_2 X + \dots + n a_n X^{n-1}$$

On voit facilement que Δ est linéaire. Est-elle continue (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée) ?

On prend X^n $(n \geq 1)$

$\|X^n\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(X^n)\|_\infty = \|nX^{n-1}\|_\infty = n$

Donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ tq $\|\Delta(P)\|_\infty \leq M \|P\|_\infty \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$

(on devrait avoir $n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ...)

Donc Δ n'est pas continue (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

② $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E \\ f & \longmapsto & u(f) \end{array} \qquad \underbrace{u(f)(x) := \int_0^x t f(t)\,dt}_{\text{c'est bien une fonction continue en } x}$$

u est bien linéaire

On utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée

$$|u(f)(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x t\,|f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x t\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

cela qq soit $x \in [0,1]$ ...

donc $\|u(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$

donc u est continue (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

Topo
V-8

Théorème Si E est un evn de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E dans F (un evn de dim quelconque) sont continues.

dém Soit $u : E \to F$ linéaire

On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E $\quad n = \dim E$

Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

On a vu que $N(x) := \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ est une norme sur E

[c'est la norme sur E qui fait de l'isomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \end{array}$

une isométrie qd on met la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$]

(!) Et comme toutes les normes sur E sont équivalentes (E est de dim finie), il suffit de montrer que $u : E \to F$ est continue pour ce choix de norme sur E.

Or $u(x) = u(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n)$ $\quad$ linéarité de u

d'où

$\|u(x)\|_F \leq |x_1| \, \|u(e_1)\|_F + \dots + |x_n| \, \|u(e_n)\|_F$ $\quad$ inég Δ

$$\leq \underbrace{\left(\|u(e_1)\|_F + \dots + \|u(e_n)\|_F\right)}_{\text{une constante}} \underbrace{\max(|x_1|, \dots, |x_n|)}_{= \underbrace{N(x)}_{\text{la norme choisie sur } E}}$$

Donc u est continue.

$\boxtimes$

③ L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E,F)$

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn

$\mathcal{L}(E,F)$ = l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F

$\mathcal{L}_c(E,F)$ = l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F

$\mathcal{L}_c(E,F)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$

$\left.\begin{matrix} f, g \text{ linéaires continues} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f+g$ et λf linéaires continues

On va définir sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ une norme, associée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Soit $u : E \to F$ linéaire continue.

On a vu qu'il existe alors une constante $M \geq 0$ telle que $\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E$

Pour $x \neq 0_E$, on a donc $\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M$

Donc $\displaystyle\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$

Déf On pose $\displaystyle |||u||| := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

Prop ⊕ Déf $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, appelée norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$

dém $|||u||| \geq 0$ clair (borne sup de nombres tous ≥ 0 ...)

$|||u||| = 0 \iff \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \quad \forall x \neq 0_E \iff \|u(x)\|_F = 0 \quad \forall x \in E$ ← on peut rajouter 0_E car $u(0_E) = 0_F$ ...

$\iff u(x) = 0_F \quad \forall x \in E$

$\iff u$ est nulle

$$|||\lambda u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|(\lambda u)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} |\lambda| \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\, |||u|||$$

$$|||u+v||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup \frac{\|u(x)+v(x)\|_F}{\|x\|_E} \underset{\uparrow}{\leq} \sup \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|v(x)\|}{\|x\|} = |||u||| + |||v|||$$

car $\|u(x)+v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \quad (\forall x \in E)$

Topo
V-9

Prop Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des evn

Soient $E \xrightarrow{u} F$ et $F \xrightarrow{v} G$ des applications linéaires continues.

Alors $v \circ u$ est linéaire continue, et $\boxed{|||v \circ u||| \leq |||u|||\,|||v|||}$

dém Quel que soit $x \in E$:

$$\|v \circ u(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G \leq |||v|||\,\|u(x)\|_F$$
$$\leq |||v|||\,|||u|||\,\|x\|_E$$

donc $\dfrac{\|v \circ u(x)\|_G}{\|x\|_E} \leq |||u||| \times |||v||| \quad \forall x \neq 0_E$

donc $v \circ u$ est (linéaire) continue, et $|||v \circ u||| \leq |||u||| \times |||v|||$

Différents expressions de $|||u|||$ $\qquad E \xrightarrow{u} F$ linéaire continue

$$|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$ c'est la définition !

$$|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|u(x)\|_F$$

clair : $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F \leq \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

et si $x \neq 0_E$: $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$

et $\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|\dfrac{u(x)}{\|x\|_E}\right\|_F = \left\|u\Big(\underbrace{\dfrac{x}{\|x\|_E}}_{\text{l'image d'un vecteur de norme (E) égale à 1}}\Big)\right\|_F$

$\boxed{\text{d'où égalité des sup}}$

$$|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F$$

clair : $\sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F \leq \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$

et si $\|x\|_E \leq 1$, $x \neq 0_E$:

$\|u(x)\|_F \leq \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|u\Big(\underbrace{\dfrac{x}{\|x\|_E}}_{\text{norme } 1}\Big)\right\|_F$

$\rightarrow \boxed{\text{inégalité dans l'autre sens}}$

Exemples

① $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (x+2y+z, -3x+2y+2z)$

de matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dans la base canonique

On met la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ et sur $\mathbb{R}^2$

On sait que f (linéaire) est continue, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dim finie $\quad |||f||| = ?$

$$\|f(x,y,z)\|_\infty = \max\big(\underbrace{|x+2y+z|}_{\leq 4\max(|x|,|y|,|z|)}, \underbrace{|-3x+2y+2z|}_{\leq 7\max(|x|,|y|,|z|)}\big)$$

donc

$\|f(x,y,z)\|_\infty \leq 7\,\|(x,y,z)\|_\infty$ et cela $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

donc $\displaystyle\sup_{\substack{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{\|f(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty} \leq 7$ $\qquad$ donc $|||f||| \leq 7$ (!)

(!) si on trouve un (x,y,z) non nul tel que $\|f(x,y,z)\|_\infty = 7\,\|(x,y,z)\|_\infty$,

alors on aura $|||f||| = 7$

En reprenant les majorations, on constate qu'on une <u>égalité</u>

lorsque par exemple $(x,y,z) = (-1,1,1)$:

$$\|(-1,1,1)\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f(-1,1,1)\|_\infty = \|(2,7)\|_\infty = 7$$

$\boxed{\text{Donc } |||f||| = 7}$

② $E = F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{u} E \\ f &\longmapsto u(f) \end{aligned} \qquad u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$$

On a déjà vu que $\|u(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty \ldots$ donc $|||u||| \leq \frac{1}{2}$

Pour la fonction constante $f \equiv 1$:

$\|f\|_\infty = 1 \quad$ et $\quad u(f)(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} \qquad \|u(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$

D'où $\|u(f)\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ pour cette fonction

Donc $\displaystyle |||u||| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \frac{1}{2}$

Topo
V-10

(2') $E = F = C^0([0,1], \mathbb{R})$

norme $\|\cdot\|_1$ — norme $\|\cdot\|_\infty$

$$|u(f)(x)| = \left| \int_0^x t f(t)\,dt \right| \leq \int_0^x t\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$$

et cela qq soit $x \in [0,1]$...

donc $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$

Donc u est continue pour ces choix de normes, et $|||u||| \leq 1$

Est-ce que $|||u||| = 1$?

(!) il existe une suite de fonctions qui s'approchent de l'égalité :

$$f_n(t) = n\,t^{n-1}$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 n\,t^{n-1}\,dt = \left[t^n\right]_0^1 = 1 \quad \text{pour tout } n$$

$$\|u(f_n)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(f_n)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x t f_n(t)\,dt \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x n\,t^n\,dt \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \frac{n}{n+1}\left[t^{n+1}\right]_0^x = \sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{n}{n+1} x^n\right) = \frac{n}{n+1}$$

donc :

$$\frac{\|u(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{\frac{n}{n+1}}{1} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

On en déduit que $\boxed{|||u||| = 1 \ :}$ on a effectivement $\displaystyle\sup_{\substack{f\in E\\ f\neq 0}} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_1} = 1$

<u>rem</u> : il n'existe pas de fonction f non nulle qui <u>réalise</u> l'égalité $\|u(f)\|_\infty = \|f\|_1$:

par compacité de $[0,1]$, la norme $\|u(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(f)(x)|$ est atteinte en un certain $x \in [0,1]$

d'où, s'il y avait égalité $\|u(f)\|_\infty = \|f\|_1$:

$$\left| \int_0^x t\,u(t)\,dt \right| = \int_0^1 |u(t)|\,dt$$

et donc $\displaystyle \underbrace{\int_0^x \left[\,|u(t)| - \varepsilon\, t\,u(t)\,\right] dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_x^1 |u(t)|\,dt}_{\geq 0} = 0$ $\quad$ [ε = signe (= +1 ou −1) de $\int_0^x t\,u(t)\,dt$]

d'où (intégrales nulles de fonctions positives <u>continues</u>) :

$$\begin{cases} |u(t)| = \varepsilon\, t\, u(t) \quad \forall t \in [0,x) \\ |u(t)| = 0 \quad \forall t \in [x,1) \end{cases}$$

← mais ceci entraîne $u(t) = 0$ sur $[0,x)$

$\boxed{\text{d'où } u(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,1)}$

④ Espaces de Banach

<u>Définition</u> Un <u>espace de Banach</u> est un espace vectoriel normé complet

<u>exemples</u> : ① Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach

② $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach

<u>Thm</u> Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un <u>espace de Banach</u>

Alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \underbrace{|||\cdot|||}_{\text{norme subordonnée à } \|\cdot\|_E \text{ et } \|\cdot\|_F})$ est un espace de Banach

dém Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E,F)$

Il s'agit de montrer qu'elle converge dans $\mathcal{L}_c(E,F)$, donc qu'il existe $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} u$ pour la norme $|||\cdot|||$.

① Pour chaque $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F

<u>en effet</u> : $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F = \|(u_n - u_p)(x)\|_F \leq |||u_n - u_p|||\ \|x\|_E$

soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N$, $|||u_n - u_p||| \leq \varepsilon / \|x\|_E$

d'où $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leq \varepsilon$ si $n,p \geq N$

(!) on peut supposer que $x \neq 0_E$: si $x = 0_E$, alors $u_n(0_E) = 0_F$ $\forall n$ et on a donc bien une suite de Cauchy de F...

② Comme F est complet par hypothèse, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite que l'on note $u(x) \in F$

On "réunit" ces limites en une application $u : E \to F$

③ On montre que $u : E \to F$ est <u>linéaire</u> :

* si $x, x' \in E$ alors $u_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} u(x)$ et $u_n(x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x')$

d'où $u_n(x+x') \underset{\text{linéarité}}{=} u_n(x) + u_n(x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x) + u(x')$

$u_n(x+x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x+x')$

donc $u(x+x') = u(x) + u(x')$ par unicité de la limite

* de même : $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

④ On montre simultanément que u est linéaire <u>continue</u> et que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} u$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$:

Topo
V-11

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|||u_n - u_p||| \leq \varepsilon \quad \forall n,p \geq N$

pour chaque $x \in E$ et $n,p \geq N$ on a donc $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$

on fait tendre p vers $+\infty$: $u_p(x) \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$ et donc $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F \xrightarrow[n\infty]{} \|u_n(x) - u(x)\|_F$

d'où :

quels que soient $x \in E$ et $n \geq N$: $\|u_n(x) - u(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$

mais cette dernière inégalité dit que $u_n - u$ est une application linéaire continue

(donc u est elle aussi continue : $u = \underbrace{(u-u_n)}_{\text{continue}} + \underbrace{u_n}_{\text{continue}}$)

et $|||u_n - u||| \leq \varepsilon$ si $n \geq N$

Donc $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $u_n \xrightarrow[n\infty]{} u$ pour la norme subordonnée $|||\cdot|||$.

$\boxed{//}$

Autres exemples d'espaces de Banach

* $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet (chapitre Complétude)

donc tout sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est également complet

en particulier si X est un espace topologique (p.ex métrique) :

$F = C^0_b(X,\mathbb{R})$ espace des fonctions $X \to \mathbb{R}$ continues et bornées

c'est un sev de E, fermé dans $E = \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

encore plus particulier : si X est un espace topologique compact

alors $C^0_b(X,\mathbb{R}) = C^0(X,\mathbb{R})$ ... toute fonction continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée

* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un cas particulier de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ $(X = \mathbb{N})$
* $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet (cf. Feuille TD Complétude)
* $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est complet (idem)
* plus généralement $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ avec $p \in [1, +\infty[$ réel

ℓ^p = ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |x_n|^p < +\infty$

muni de la norme $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n\geq 0} |x_n|^p} = \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\right)^{1/p}$

On montre que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est complet

Séries convergentes dans un espace de Banach

Déf Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E

① la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est <u>convergente</u> si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (<u>dans</u> E)

② la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est <u>normalement convergente</u> si la série $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|_E$ est convergente (<u>dans</u> $\mathbb{R}$)

Rem ⚠ Une série convergente n'est pas nécessairement normalement convergente

exemple : $E = \mathbb{R}$ usuel $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ~~diverge~~ converge, mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

Prop Dans un <u>espace de Banach</u>, toute série normalement convergente est convergente

dém Soit (x_n) une série normalement convergente d'éléments de E.

On va montrer que la suite de ses sommes partielles est de Cauchy, donc convergente (hypothèse de complétude)

Soit $\varepsilon > 0$.

La série $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geq N, \ \forall p \geq 0, \quad \sum_{k=m+1}^{m+p} \|u_k\| \leq \varepsilon$$

Alors, pour $n \geq N$ et $p \geq 0$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \underset{\text{inég } \Delta}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \varepsilon$$

Or $\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k = \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \ldots$

Donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\geq 0}$ est de Cauchy,

ce qu'on voulait démontrer.

□

En fait, cette propriété "NCV ⟹ CV" caractérise les espaces vectoriels normés <u>complets</u>, comme le montre la proposition suivante.

Topo
V-12

Prop Soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute série normalement convergente est convergente. Alors E est un espace de Banach

dém Il s'agit de montrer que E est complet.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de ~~points~~ Cauchy de points de E.

(!) pour montrer que (x_n) converge, il suffit de montrer qu'il en existe une sous-suite convergente

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N_1$, $\|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

puis

il existe $N_2 > N_1$ tel que $\forall n,p \geq N_2$, $\|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^2}$

puis

il existe $N_3 > N_2$ tel que $\forall n,p \geq N_3$, $\|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^3}$

terme général d'une série réelle positive convergente

etc...

On construit ainsi une suite d'entiers

$$N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_k < N_{k+1} < \dots$$

de sorte que

$$\forall k \geq 1 \ , \ \forall n,p \geq N_k \ , \ \|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^k}$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$:

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \leq \frac{1}{2^k} \qquad (\text{car } N_k \leq N_{k+1})$$

La série réelle positive $\sum_{k\geq 1} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|$ est donc convergente

(son terme g^{al} est majoré par le terme g^{al} d'une série convergente)

Donc $\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ est une série normalement convergente.

Donc $\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ est convergente, d'après l'hypothèse "NCV $\Rightarrow$ CV"

Or sa somme partielle est

$$\sum_{k=1}^{K} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) = x_{N_{K+1}} - x_{N_1} \quad (\text{série téléscopique}) \qquad (K \geq 1 \text{ entier})$$

Donc la suite $(x_{N_k})_{k\geq 1}$ est convergente ⚠

[il existe $S \in E$ tq $\underbrace{\sum_{k=1}^{K} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})}_{x_{N_{K+1}} - x_{N_1}} \xrightarrow[K\to+\infty]{} S$ d'où $x_{N_{K+1}} \xrightarrow[K\to+\infty]{} S + x_{N_1}$]

Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une suite extraite convergente ~~[illegible]~~

donc elle converge (voir le début de la preuve)

$\square$

Exemple exponentielle dans $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E,E)$

soit E un espace de Banach

on a vu que $\mathcal{L}_c(E,E) = \mathcal{L}_c(E)$ hérite de la norme subordonnée $|||\cdot|||$

$$|||u||| = \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$ (la même norme est utilisée au départ et à l'arrivée)

et que $\mathcal{L}_c(E)$ est complet (parce que E est complet)

Donc toute série de $\mathcal{L}_c(E)$ qui est normalement convergente est convergente...

Par exemple, si $u \in \mathcal{L}_c(E)$:

la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente

car $\begin{cases} \left|\left|\left| \frac{u^n}{n!} \right|\right|\right| = \frac{1}{n!} |||u^n||| \leq \frac{1}{n!} |||u|||^n \\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |||u|||^n \text{ converge (sa somme est } e^{|||u|||}) \end{cases}$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est convergente... On note e^u ou $\exp(u)$ sa somme :

$$e^u = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$$

On montre sans trop de difficultés que :

~~[illegible]~~ $\begin{cases} e^0 = id_E & 0 = \text{l'endomorphisme nul} \\ e^u \circ e^v = e^{u+v} & \text{si } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ e^u \text{ est toujours inversible, d'inverse } (e^u)^{-1} = e^{-u} \\ [\text{car } u \text{ et } -u \text{ commutent, donc } e^u \circ e^{-u} = e^{-u} \circ e^u = e^0 = id_E \ldots] \end{cases}$

Topo
V-13

Exemple $GL_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$ (si E Banach)

(!) qu'est-ce que c'est ?
$GL(E)$ est l'ensemble des endomorphismes $E \xrightarrow{u} E$ qui sont bijectifs
ils ont une application réciproque u^{-1} qui est également linéaire (c'est automatique)

$GL_c(E)$ est l'ensemble des endomorphismes $E \xrightarrow{u} E$
qui sont bijectifs et qui sont continus
un théorème des espaces de Banach (le "thm de l'application ouverte")
affirme qu'alors u^{-1} est elle aussi continue

Pour montrer que $GL_c(E)$ est ouvert :

① d'abord on montre que id_E (qui est bien linéaire bijective continue ...)
est dans l'intérieur de $GL_c(E)$

(!) on s'inspire de l'égalité $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n$ vraie pour x réel tq $|x| < 1$

on en déduit que
si $|||u||| < 1$ dans $\mathcal{L}_c(E)$,
alors la série $\sum_{n \geq 0} u^n$ est normalement convergente (car $|||u^n||| \leq |||u|||^n$)
et donc est convergente (complétude)

de plus $\left(\sum_{n=0}^{N} u^n\right) \circ (id_E - u) = (id_E + u + \dots + u^n) \circ (id_E - u)$

$= id_E + u + \dots + u^n - (u + u^2 + \dots + u^n + u^{n+1})$

$= id_E - \underbrace{u^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ car $|||u^{n+1}||| \leq \underbrace{|||u|||^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}_{\text{car } |||u||| < 1 \ (!)}$

d'où, en passant à la limite :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) \circ (id_E - u) = id_E$$

et de même :

$$(id_E - u) \circ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) = id_E$$

on en déduit que $id_E - u$ est inversible, et que son inverse est $(id_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

ainsi : si $|||u||| < 1$, alors $id_E - u \in Gl_c(E)$

autrement dit : $B(id_E, 1)$ est contenue dans $Gl_c(E)$

(car $v \in B(id_E, 1) \Leftrightarrow |||v - id_E||| < 1$

$\Leftrightarrow$ v s'écrit $v = id_E - u$ avec $|||u||| < 1$

(poser $u = id_E - v$ ...))

on vient bien de montrer que ~~B(id~~ id_E appartient à $\overset{\circ}{\overline{Gl_c(E)}}$ dans $\mathcal{L}_c(E)$ ...

② si maintenant on considère un $v \in Gl_c(E)$ quelconque :

$$v - u = v \circ \underbrace{(id_E - v^{-1} \circ u)}$$ (!)

inversible

on sait que ceci est inversible si $|||v^{-1} \circ u||| < 1$ ...

or $|||v^{-1} \circ u||| \leq |||v^{-1}|||\ |||u|||$

donc $id_E - v^{-1} \circ u$ est inversible si $|||u||| < \dfrac{1}{|||v^{-1}|||}$

donc $|||u||| < \dfrac{1}{|||v^{-1}|||} \Rightarrow v - u$ inversible

autrement dit : $B\left(v, \dfrac{1}{|||v^{-1}|||}\right)$ est contenue dans $Gl_c(E)$

(m̃ argument que plus haut avec $B(id_E, 1)$)

et donc v est dans $\overset{\circ}{\overline{Gl_c(E)}}$

<u>ccl</u> : tout $v \in Gl_c(E)$ est intérieur à $Gl_c(E)$

c-à-d $Gl_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$.