Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Montrer que les seuls éléments inversibles pour le produit de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, c'est-à-dire les constantes non-nulles.

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de A par B.
(a) $A = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$ et $B = X - 1$, en déduire l'évaluation $A(1)$,
(b) $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$ et $B = X + 3$, en déduire l'évaluation $A(-3)$,
(c) $A = 4X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.

Exercice 3. Développer A en puissances de $X - 2$. En déduire les dérivées de la fonction $A(x)$ en 2.
(a) $A = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 50X + 90$,
(b) $A = X^5 - 4X^3 + 6X^2 - 8X + 10$.

Exercice 4. Trouver le PGCD de A et B ainsi que son expression linéaire en fonction de A et B pour
(a) $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$ et $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$,
(b) $A = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$ et $B = X^2 - X + 1$.

Exercice 5. Pour P, A, B, trouver S, T tels que $P = SA + TB$
(a) $P = 2X - 1$, $A = X^3$ et $B = (X - 1)^2$,
(b) $P = 1$, $A = (X - 1)(X - 2)$ et $B = X(X + 1)(X + 2)$.

Exercice 6. Trouver la multiplicité de z_0 comme racine du polynôme A.
(a) $A = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ avec $z_0 = 2$,
(b) $A = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$ avec $z_0 = -2$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine double.

Exercice 9. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :
(a) $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$,
(b) $X^5 - 7X^3 - 2X^2 + 12X + 8$,
(c) $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$,
(d) $X^4 + (3i - 1)X^2 - 2 - i$,
(e) $X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
(a) $X^n - 1$,
(b) $X^3 - 2$,
(c) $X^6 + 27$,
(d) $X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 11. Trouver un polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[X]$ de degré minimal possédant les racines demandées. Même question dans $\mathbb{R}[X]$.
(a) 1 est racine double et $2, 3, 1 + i$ sont racines simples,
(b) i est racine double et $-1 - i$ est une racine simple.

Exercice 12. Déterminer le PGCD des deux polynômes suivants :

(a) $(X-1)^3(X+2)^2(X-3)(X+4)$ et $(X-1)^2(X+2)(X+5)$,

(b) $(X-1)(X^2-1)(X^3-1)$ et $(X+1)(X^2+1)(X^3+1)$,

(c) X^m-1 et X^n-1.

Exercice 13. Soient $m>n>k$ trois entiers naturels. Montrer que le polynôme $X^{3m}-X^{3n+1}+X^{3k+2}$ est divisible par X^2-X+1.

Exercice 14. Déterminer tous les polynômes P dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 15. On se propose de calculer le déterminant de Van der Monde :

$$V(x_1,\ldots,x_n)=\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1}\\ . & . & . & \ldots & .\\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

(a) On suppose qu'il existe $i\neq j$ tel que $x_i=x_j$. Que vaut $V(x_1,\ldots,x_n)$? On supposera par la suite que $\forall i\neq j, x_i\neq x_j$.

(b) On considère l'application polynomiale $P(X)=V(x_1,\ldots,x_{n-1},X)$. Déterminer son degré et ses racines.

(c) Quel est le coefficient dominant de P ?

(d) Montrer que $V(x_1,\ldots,x_n)=V(x_1,\ldots,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)$. Conclure.

Exercice 16. On se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.

(a) Soit P un tel polynôme, on note Z l'ensemble de ses racines.

  (i) Montrer que si $z\in Z$, alors $z^2\in Z$. En déduire que $|z|=1$ ou $z=0$.

  (ii) Montrer que si $z\in Z$, alors $(z-1)^2\in Z$.

  (iii) En déduire que $Z\subset\{0,1\}$.

(b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.