IV. Complétude

⚠ notion métrique

1) Suites de Cauchy

Déf Soit (X,d) un espace métrique. Une suite de Cauchy de X est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X telle que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \forall p \geq N, \quad d(x_n, x_p) < \varepsilon}$$

"quel que soit $\varepsilon > 0$, au-delà d'un certain rang tous les termes de la suite sont deux à deux ε-proches"

⚠ Deux distances fortement équivalentes donnent la même notion de suite de Cauchy : si d, d' sont deux distances sur X telles que $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y) \quad \forall x,y \in X$ (pour des constantes $\alpha, \beta > 0$), alors toute suite de Cauchy pour d est de Cauchy pour d', et réciproquement

p.ex si (x_n) est de Cauchy pour d

soit $\varepsilon > 0$

il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N$, $d(x_n, x_p) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$ [(x_n) est de Cauchy pour d]

pour $n, p \geq N$, on a alors $d'(x_n, x_p) \leq \beta\, d(x_n, x_p) \leq \beta \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$

donc (x_n) est de Cauchy pour d'

⚠ Mais deux distances topologiquement équivalentes (= ayant les mêmes ouverts) ne donnent pas nécessairement la m̂ notion de suite de Cauchy (voir feuille TD4)

Prop (X,d) espace métrique

① Toute suite de Cauchy est bornée

② Toute suite convergente est de Cauchy

③ Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence, alors elle converge

rem : ③ est très utile pour mq une suite de Cauchy converge

dém ① Soit (x_n) une suite de Cauchy de X.

$\varepsilon = 1$: il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geqslant N \quad d(x_n, x_p) < 1$

Alors tous les x_n pour $n \geqslant N$ appartiennent à la boule $B(x_N, 1)$.

Les termes précédents $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ sont en nombres finis.

Donc la suite (x_n) est bornée

(!) on a déjà vu un raisonnement similaire quand on a montré que les suites convergentes sont bornées

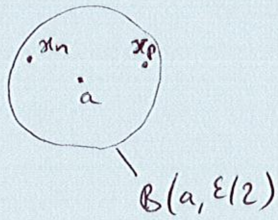
② Soit (x_n) une suite convergente : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \in X$

Soit $\varepsilon > 0$

Alors $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geqslant N \quad d(x_n, a) < \varepsilon/2$ (!)

Si $n,p \geqslant N$, on a alors :

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, a) + d(a, x_p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



Donc (x_n) est de Cauchy

③ Soit (x_n) une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence $a \in X$.

On va montrer qu'alors $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$.

d'où une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$

Pour cela, soit $\varepsilon > 0$

Alors d'une part $\exists N_1 \in \mathbb{N} ; \forall n,p \geqslant N_1 , \ d(x_n, x_p) < \varepsilon/2$ (!) (suite de Cauchy)

et d'autre part $\exists N_2 \in \mathbb{N} ; \forall n \geqslant N_2 , \ d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon/2$ (!) ($x_{\varphi(n)}$ tend vers a)

Posons $N := \max(N_1, N_2)$.

Alors pour tout $n \geqslant N$:

$$d(x_n, a) \leq \underbrace{d(x_n, x_{\varphi(n)})}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{car } N_1 \leq n \leq \varphi(n)}} + \underbrace{d(x_{\varphi(n)}, a)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{car } N_2 \leq n \leq \varphi(n)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $x_n \to a$ quand $n \to \infty$.

(!) La notion de suite de Cauchy est métrique. Elle n'est pas préservée par les applications continues (voir feuille TD). Mais elle l'est par les applications uniformément continues :

Prop Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ uniformément continue.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y

dém. Soit (x_n) de Cauchy dans X.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par uniforme continuité de f :

$\exists \delta > 0 ; \forall x, x' \in X, \ d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Et comme la suite (x_n) est de Cauchy :

$\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n,p \geq N, \ d_X(x_n, x_p) < \delta$

On en déduit :

$\forall n,p \geq N, \ d_Y(f(x_n), f(x_p)) < \varepsilon$

Donc $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y.

$\blacksquare$

(2) Espaces métriques complets

Déf Un espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy de points de X est convergente. Une partie $A \subseteq X$ est une partie complète de X si (A, d_A) est un espace complet

distance induite

Exemple fondamental (!)

$\mathbb{R}$ usuel est complet

dém toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est bornée, donc elle admet une sous-suite convergente (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, cf Compacité), donc elle converge (!)

Rem : $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas complet

il existe des suites de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, par exemple, $\underbrace{\text{"}r_n \to \sqrt{2}\text{"}}_{\text{dans } \mathbb{R}\,!}$

De telles suites sont donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$,

donc aussi de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (distance induite !)

mais elles ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$ (parce que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$...)

Exemple Tout espace métrique discret est complet

(les suites de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace discret sont stationnaires :

pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $\forall n,p \geq N \quad d(x_n, x_p) < 1$

or $\underbrace{d(x_n,x_p) < 1 \Rightarrow d(x_n,x_p) = 0}_{\text{dans } (X,d) \text{ discret}} \Rightarrow x_n = x_p$

donc la suite stationne à partir du rang N...)

Prop Tout espace métrique compact est complet

dém Toute suite d'un espace compact, en particulier toute suite de Cauchy, admet une sous-suite convergente. Donc toute suite de Cauchy y est convergente.

Topo
IV-3

Prop Soit (X,d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$

① Si A est une partie complète de X, alors A est fermée dans X

② Si X est complet et A est fermée dans X, alors A est complète

dém ① On suppose A partie complète de X.

Soit (a_n) une suite de points de A qui converge dans X vers un certain $x \in X$.

[il s'agit de montrer que $x \in A$, pour montrer que A est séquentiellement fermée]

La suite (a_n) est convergente dans X, donc c'est une suite de Cauchy de points de X, donc c'est aussi une suite de Cauchy de points de A (A est munie de la distance induite, qui est la restriction de la distance de X).

Par complétude de A, cette suite (a_n) doit converger dans A.

Mais comme elle converge déjà dans X (vers x), c'est que nécessairement le point x appartient à A ($\underbrace{\text{unicité de la limite}}_{\text{on est dans un espace métrique !}}$)

Donc A est (séquentiellement) fermée dans X.

② On suppose (X,d) complet et A fermée dans X.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de A.

Alors c'est aussi une suite de Cauchy de points de X (toujours la même idée...)

Donc elle converge dans X (qui est complet)

et sa limite doit appartenir à A (qui est fermée, donc séquentiellement fermée).

Donc la suite (a_n) converge dans A.

Donc A est complète (pour la distance induite)

▨

Prop Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques (non vides...)

Alors $X \times Y$, muni de la distance d_∞ associée à d_X et d_Y, ou de toute distance fortement équivalente à d_∞, est complet si et seulement si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets

rappel : $d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y'))$

dém $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(X\times Y, d_\infty)$.

On suppose (X, d_X) et (Y, d_Y) complets.

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X, d_X)
et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ " " " " " (Y, d_Y) ⚠

car $\begin{cases} 0 \leq d_X(x_n, x_p) \leq d_\infty((x_n,y_n),(x_p,y_p)) \\ 0 \leq d_Y(y_n, y_p) \leq d_\infty((x_n,y_n),(x_p,y_p)) \end{cases}$

Donc $x_n \longrightarrow x_\infty$ dans X (complétude)

et $y_n \longrightarrow y_\infty$ dans Y (complétude)

D'où $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\infty]{} (x_\infty, y_\infty)$ dans $(X\times Y, d_\infty)$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $(X_n \times Y_n, d_\infty)$ complet

Soit (x_n) une suite de Cauchy de X

On prend un point quelconque $b \in Y$ (supposé non vide !)

Alors $(x_n, b)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(X\times Y, d_\infty)$

puisque $d_\infty((x_n,b),(x_p,b)) = \max(d_X(x_n,x_p), \underbrace{d_Y(b,b)}_{=0}) = d_X(x_n,x_p)$

Donc cette suite converge dans $(X\times Y, d_\infty)$ qui est supposé complet,

et donc (x_n) converge dans (X, d_X)

▨

Généralisation immédiate : un produit fini d'espaces métriques est complet si et seulement si chacun de ses facteurs est complet.

Exemple ⚠ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}$ usuel est complet

distance d_∞ (ou d_1, ou d_2, qui lui sont fortement équivalentes)

Topo
IV - 4

Théorème (Cantor) Soit (X,d) un espace métrique.

Alors (X,d) est complet si et seulement si :

pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de X non vides

tels que $\mathrm{diam}(F_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

rem dans la conclusion "$\cap F_n \neq \emptyset$", on a en fait $\cap F_n =$ un singleton

(car le diamètre des F_n tend vers 0, donc $\cap F_n$ ne peut pas contenir deux points différents)

rem comparer avec un énoncé analogue lorsque (X,d) est compact :

toute intersection décroissante de fermés non vides est non vide

(!) on a renforcé l'hypothèse sur l'espace : "être compact" est plus fort que "être complet"

mais on a affaibli l'hypothèse sur les fermés : on ne suppose plus que leur diamètre tend vers 0

dém (thm de Cantor)

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose (X,d) complet et on se donne une suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides telle que $\mathrm{diam}(F_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

On choisit un point x_n dans chaque F_n (hypothèse F_n non vide)

On affirme que la suite (x_n) est alors de Cauchy :

soit $\varepsilon > 0$

soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$ (hypothèse $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$)

si $n, p \geq N$ alors $x_n, x_p \in F_N$ car la suite (F_n) est décroissante

[donc $F_n \subseteq F_N$ et $F_p \subseteq F_N$]

d'où $d(x_n, x_p) < \varepsilon$

Donc (x_n) est de Cauchy dans X, donc elle est convergente (X supposé complet)

Soit $a = \lim_{n\infty} x_n$.

! pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $x_p \in F_n \quad \forall p \geq n$

(car la suite (F_n) est décroissante ...)

Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le point a est la limite d'une suite de points de F_n

Donc $a \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (hypothèse : F_n fermé dans $X \quad \forall n$)

Donc $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$

et ainsi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ n'est pas vide, $\boxed{\text{cqfd}}$

⇐ On suppose que pour toute suite décroissante de fermés, etc...

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X.

! On a vu que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_p \, ; \, p \geq n\}}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n), autrement dit (espace métrique) l'ensemble des limites de sous-suites convergentes de (x_n).

D'autre part, pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, il suffit de montrer qu'elle possède une sous-suite convergente !

Donc il suffit de montrer que $\Lambda \neq \emptyset$ ...

Or chaque $F_n := \overline{\{x_p \, ; \, p \geq n\}}$ est un fermé non vide

(c'est l'adhérence d'un ensemble non vide)

De plus $F_{n+1} \subseteq F_n \quad \forall n$ (on l'a déjà vu)

! et $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ car la suite (x_n) est de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$

soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq N \quad d(x_n, x_p) < \varepsilon$ (suite de Cauchy)

alors si $n \geq N$, $\operatorname{diam}\{x_p \, ; \, p \geq n\} \leq \varepsilon$ (l'inégalité devient large parce qu'on a pris une borne supérieure)

et donc $\forall n \geq N$, $\operatorname{diam}(F_n) \leq \varepsilon$

↑ car $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$ pour toute partie A d'un espace métrique

Donc $\bigcap F_n \neq \emptyset$ par hypothèse

C'est ce qu'on voulait montrer (voir plus haut)

▨ fin de la démonstration du théorème de Cantor

Topo
IV - 5

Importance des hypothèses du thm de Cantor

* F_n fermé : $\mathbb{R}$ est complet mais $\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0,\tfrac{1}{n}[}_{\text{une intersection décroissante de parties non fermées non vides dont le diamètre tend vers 0...}} = \emptyset$

* F_n non vides : évident ! si l'un des F_n est vide, alors bien sûr $\bigcap F_n = \emptyset$ aussi...

* diam(F_n) tend vers 0 : $\mathbb{R}$ est complet mais $\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,+\infty[}_{\text{une intersection décroissante de fermés non vides dont le diamètre ne tend pas vers 0...}} = \emptyset$

* X complet :

si on prend $X = \mathbb{Q}$ usuel (non complet !)

et si (a_n) est une suite croissante de rationnels telle que $a_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$

(b_n) ——— décroissante ——— $b_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$

alors $\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n]}_{\text{une intersection décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0}} = \emptyset$ dans $\mathbb{Q}$

(!) On a vu "compact métrique $\Rightarrow$ complet", et on sait que la réciproque est fausse (p.ex $\mathbb{R}$ est complet non compact).

Que peut-on ajouter à "complet" pour avoir "compact" ?

Théorème Soit (X,d) un espace métrique.

Alors X est compact $\Longleftrightarrow$ X est complet et précompact

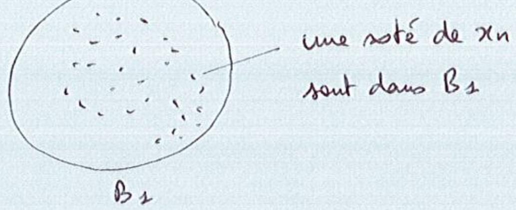
dém $\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose X précompact complet. On va montrer que X est alors séquentiellement compact.

Soit (x_n) une suite de points de X

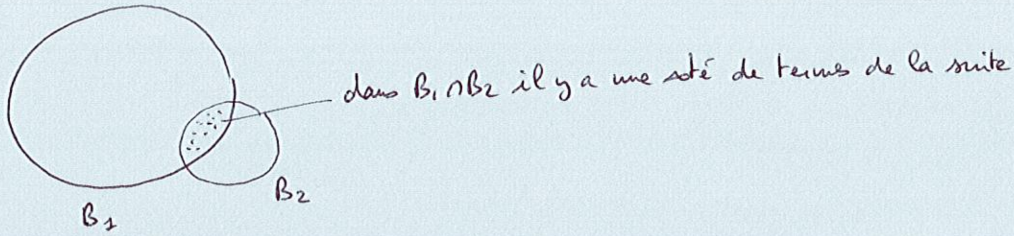
On recouvre X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1 (précompacité)

L'une de ces boules, disons B_1, doit contenir une infinité de termes de la suite.

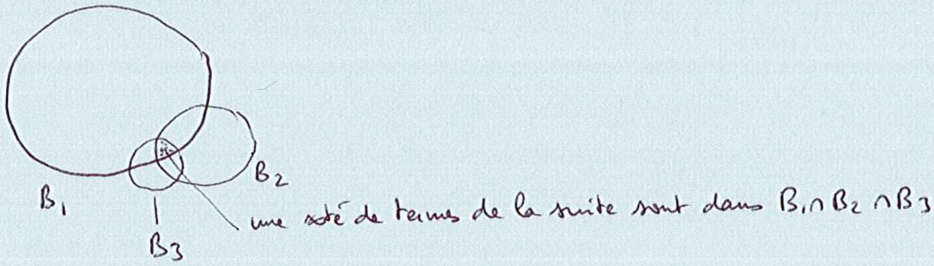


Puis on recouvre X (et donc aussi B_1 ...) par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$.

L'une de ces boules, disons B_2, doit donc contenir une infinité de tous les termes de la suite contenus dans B_1



On continue ainsi à choisir $B_3, B_4, B_5, \ldots$



B_k est une boule de rayon $\frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$

$B_1 \cap \ldots \cap B_k$ contient une infinité de termes de la suite $(\forall k \geq 1)$

c-à-d l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \, ; \, x_n \in B_1 \cap \ldots \cap B_k\}$ est infini, et cela pour chaque $k \geq 1$

On peut alors extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{\varphi(n)} \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ⚠!

Cette suite extraite est de Cauchy :

soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$

si $n, p \geq N$, alors $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(p)}$ appartiennent à $B_1 \cap \ldots \cap B_N$

donc sont dans B_N (= une boule de rayon $\frac{1}{N}$)

d'où $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \varepsilon$ par inégalité Δ

Comme X est complet, cette suite doit converger. On a donc trouvé une sous-suite <u>convergente</u> de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est ce qu'on voulait montrer (compacité séquentielle)

Exemple compacité du cube de Hilbert

$H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres appartenant à $[0,1]$

pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans H, on pose :

$$d(x,y) := \sum_{n\geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

⚠ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série (à termes positifs) <u>convergente</u> (on pourrait en choisir une autre, ce qui est important c'est qu'elle converge...)

donc, comme $|x_n - y_n| \leq 1 \ \forall n$

(vu que $0 \leq x_n \leq 1$ et $0 \leq y_n \leq 1 \ \forall n$)

la série $\sum_{n\geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ converge elle aussi

On montre facilement que d est une distance sur H

d'où (H,d) espace métrique le "cube de Hilbert"

On montre que ① (H,d) est précompact

② (H,d) est complet

On en déduit que (H,d) est compact

Un exemple important d'espace métrique

Théorème Soit X un ensemble (non vide) quelconque

Alors $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet

rappel $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ espace (vectoriel) des fonctions <u>bornées</u> $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ norme de la convergence uniforme

$d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty$ distance associée

dém Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$

Il s'agit de montrer qu'elle a une limite, c'est-à-dire qu'il faut trouver une fonction bornée $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ telle que $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

(càd telle que $f_n \xrightarrow[n\infty]{} f$ uniformément sur X)

On va d'abord montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, puis que cette fonction est bornée et que $f_n \to f$ uniformément

① Pour chaque $x \in X$, la <u>suite réelle</u> $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

<u>en effet</u> : soit $\varepsilon > 0$

alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N$, $d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$

or $0 \leq |f_n(x) - f_p(x)| \leq d_\infty(f_n, f_p)$

donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N$, $|f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$

donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy (pour chaque $x \in X$).

② Or $\mathbb{R}$ est <u>complet</u> (!)

Donc chaque suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$).

On note $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$

(cette limite est bien un nombre qui a priori dépend de x)

Puis on "réunit" toutes ces limites en une fonction, autrement dit

on définit
$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

③ Soit $\varepsilon > 0$. ~~Soit N∈N~~

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,p \geq N$, $d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$

Alors : quels que soient $n \geq N$, $p \geq N$ et $x \in X$, on a $|f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$

On fixe (pour le moment) $n \geq N$ et $x \in X$, et on fait tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité. Comme $f_p(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$, on obtient à la limite

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{(l'inégalité est devenue large...)}$$

Et donc : $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

On en déduit d'une part que $f : X \to \mathbb{R}$ est <u>bornée</u>

car $0 \leq |f(x)| \leq |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \|f_n\|_\infty$ (pour $n \geq N$)

et d'autre part que

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (\text{toujours pour } n \geq N)$$

Ainsi : $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq N\ ,\ d_\infty(f, f_n) \leq \varepsilon$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$, $\boxed{\text{cqfd}}$

<u>Rem</u> ℓ^∞ en est un cas particulier ($X = \mathbb{N}$)

espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées muni de la norme $\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

<u>Rem</u> Supposons maintenant que (X, d) est un <u>espace métrique compact</u>. On sait que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée (et atteint ses bornes), donc $C^0(X, \mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

<u>Lemme</u> $C^0(X, \mathbb{R})$ est fermé dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$

<u>Corollaire</u> $(C^0(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ est un espace métrique complet

<u>dém (Corollaire)</u> : tout sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet (pour la distance induite)

<u>dém (Lemme)</u> "une limite uniforme de fonctions continues est continue"

Supposons que $f_n \to f$ pour d_∞, avec toutes les fonctions f_n <u>continues</u>, et montrons qu'alors f est continue

(!) En fait ici on n'a plus besoin de la compacité de X, ce qui est normal puisque la continuité est une notion locale...

Pour montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue :

Soit $a \in X$, et soit $\varepsilon > 0$.

Par la convergence uniforme, on sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3 \qquad (*)$$

(!)

D'autre part f_N est continue en a, donc il existe un $\delta > 0$

tel que $\forall x \in X, \quad d_X(x,a) < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3 \qquad (**)$

(!)

Pour $d_X(x,a) < \delta$, on a donc :

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{par } (*)}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{par } (**)}} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{par } (*)}} < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in X, \ d_X(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

c-à-d f est continue en a

$\boxed{//}$

(3) Théorème du point fixe de Banach

Théorème (Banach) Soit (X,d) un espace métrique complet.

Soit $f : X \to X$ une application contractante (= une contraction)

c'est-à-dire une application k-lipschitzienne pour un certain

nombre $k \in]0,1[$ (!) il est crucial que k soit strictement inférieur à 1

Alors f possède un unique point fixe :

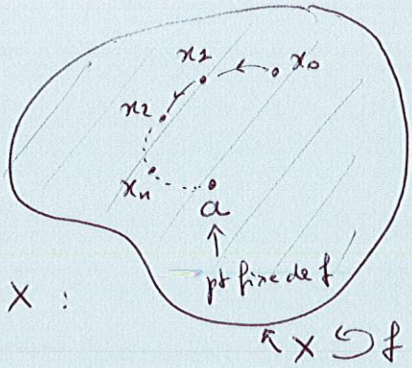
$$\exists!\, x \in X \; ; \; f(x) = x$$

dém Par hypothèse, on a $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$
(pour une certaine constante k appartenant à $]0,1[$)

<u>unicité du point fixe</u> : si $f(x) = x$ et $f(y) = y$

alors $\underbrace{d(f(x), f(y))}_{= d(x,y)} \leq k\, d(x,y)$

donc $0 \leq \underbrace{(1-k)}_{>0}\, \underbrace{d(x,y)}_{\geq 0} \leq 0$ d'où $d(x,y) = 0$
et donc $x = y$



dessin

<u>existence d'un point fixe</u>

soit $x_0 \in X$ n'importe quel point de X

on considère ses images successives par l'application $X \xrightarrow{f} X$:

x_0
$x_1 := f(a)$
$x_2 := f(f(a)) = f^2(a)$
etc...

donc $\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

(!) On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une <u>suite de Cauchy</u>, donc une suite convergente puisque X est supposé <u>complet</u>, et que sa limite est nécessairement un <u>point fixe de f</u>

(i) d'abord on commence par estimer la distance entre deux termes consécutifs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k\, d(x_n, x_{n-1}) \qquad \forall n \geq 1$$

On en déduit facilement par récurrence :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n \underbrace{d(x_1, x_0)}_{= d(f(x_0), x_0)}$$

= une certaine constante (indépendante de n)

$$\left[\begin{aligned} \text{p. ex } d(x_4, x_3) &\leq k\, d(x_3, x_2) \\ &\leq k\,k\, d(x_2, x_1) \\ &\leq k\,k\,k\, d(x_1, x_0) = k^3 d(x_1, x_0) \end{aligned}\right]$$

(ii) puis on estime la distance entre deux termes quelconques :

si $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ alors

$$d(x_{n+p}, x_n) \underset{\text{inég } \Delta}{\leq} d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\underset{\text{d'après (i)}}{\leq} k^{n+p-1} d(x_1, x_0) + \cdots + k^n d(x_1, x_0)$$

$$= d(x_1, x_0) \left[k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^{n+1} + k^n \right]$$

$$= k^n d(x_1, x_0) \underbrace{\left[k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k + 1 \right]}_{\text{somme des } p \text{ premiers termes d'une série géométrique de raison } k \neq 1 \ (!)}$$

$$= \frac{1 - k^p}{1 - k} k^n d(x_1, x_0)$$

Or $0 < k < 1$, donc $0 < 1 - k^p \leq 1$

Donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \qquad \forall n \geqslant 0 \ , \forall p \geqslant 1$$

Mais $k^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ car $0 < k < 1$ (!)

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 1 \ , \ d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$

la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy.

(iii) Comme (X, d) est <u>complet</u>, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc.

D'où l'existence de $a \in X$ tel que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$

~~[illegible]~~ Donc $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$

puisque f est <u>continue</u> (elle est lipschitzienne)

Or $f(x_n) = x_{n+1}$, et $x_{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} a$

Donc $f(a) = a$ par unicité de la limite (espace métrique)

Donc a est un point fixe de f.

Exemple ~~existe~~ Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue donnée.

Il existe une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation intégrale :

$$(*) \quad f(x) = u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t)\, dt \quad \forall x \in [0,1]$$

idée : $(*)$ s'interprète comme un point fixe

$X = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de d_∞

(X, d_∞) est complet (voir plus haut)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array} \qquad \Phi(f)(x) := \underbrace{u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t)\, dt}_{\text{ceci est bien une fonction } C^0 \text{ en } x \text{ (intégrale à paramètre)}}$$

on montre que Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne (!) donc contractante

On en déduit qu'elle possède un unique point fixe, donc que $(*)$ admet une unique solution f.

(4) Prolongement des applications uniformément continues

Théorème Soient X et Y des espaces métriques, avec Y complet.

On se donne :

$$\begin{cases} A \text{ une partie dense dans } X \\ \text{une application } f : A \to Y \text{ uniformément continue} \end{cases} \left(\begin{array}{c}\text{pour les distances}\\ \text{de } X \text{ et } Y\end{array}\right)$$

Alors il existe une unique application continue $F : X \to Y$ telle que $F_{|A} = f$. De plus, F est uniformément continue.

dém

unicité du prolongement continu

Supposons que F et G soient deux prolongements continus de f

Soit $x \in X$. Par densité de A, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $a_n \longrightarrow x$ dans X.

Par continuité de F et de G, on doit donc avoir :

$$F(a_n) \xrightarrow[n\infty]{} F(x)$$
$$G(a_n) \xrightarrow[n\infty]{} G(x)$$

Or $F(a_n) = f(a_n) = G(a_n)$ pour tout n, puisque F et G prolongent f.

Donc $F(x) = G(x)$ par unicité de la limite (espace métrique)

existence du prolongement continu

Soit $x \in X$. Par densité, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de ~~X~~ A telle que $a_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans X.

(!) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans (X, d_X). Or $f : X \to Y$ est uniformément continue (pour les distances d_X et d_Y). Donc la suite image $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (Y, d_Y).

propriété du début du chapitre

Comme (Y, d_Y) est supposé complet, cette suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger dans Y.

On affirme que sa limite ne dépend que de x, et pas de la suite (a_n) de points de A telle que $a_n \to x$.

En effet, si (a'_n) est une autre telle suite de points de A (tq $a'_n \xrightarrow[n\infty]{} x$)

alors $\underbrace{a_0, a'_0, a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n, \dots}_{\text{on intercale les suites } (a_n) \text{ et } (a'_n)} \xrightarrow[n\infty]{} x$

Donc, d'après ce qui précède, la suite des images doit converger dans Y

$$f(a_0), f(a'_0), f(a_1), f(a'_1), \dots, f(a_n), f(a'_n), \dots \xrightarrow[n\infty]{} \text{un pt de } Y$$

Donc les suites extraites $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n), \dots$ et $f(a'_0), f(a'_1), \dots, f(a'_n), \dots$ doivent converger vers ce même point, donc elles ont bien la même limite.

On peut donc poser $F(x) := \lim_{n\infty} f(a_n)$ limite dans Y

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de points de A qui converge vers x.

On obtient ainsi une application $F : X \longrightarrow Y$ ...

C'est un prolongement de f :

si $x \in A$, alors la suite constante $(\overset{x}{a}, \overset{x}{a}, \overset{x}{a}, \dots)$ converge vers x (!)

donc, par définition, $F(x) := \lim_{n\infty} \underbrace{f(x)}_{\text{ne dépend pas de } n\dots}$

autrement dit, $F(x) = f(x)$

ce que l'on voulait montrer.

F est uniformément continue :

(!)

soit $\varepsilon > 0$

soit $\delta > 0$ tel que $\forall a, a' \in A,\ d_X(a,a') < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon/3$

(continuité uniforme de f)

Soient $x, x' \in X$ tels que $d_X(x,x') < \delta/3$ (!)

Soit (a_n) une suite de pts de A telle que $a_n \xrightarrow[n\infty]{} x$

— (a'_n) ——— telle que $a'_n \xrightarrow[n\infty]{} x'$

Il existe alors un N assez grand pour que

$$\forall n \geq N,\ \begin{cases} d_X(a_n, x) < \dfrac{\delta}{3} \text{ et } d_X(a'_n, x') < \delta/3 \\ d_Y(f(a_n), F(x)) < \dfrac{\delta}{3} \text{ et } d_Y(f(a'_n), F(x')) < \delta/3 \end{cases}$$

(!) car $a_n \to x$ et $a'_n \to x'$

donc $f(a_n) \to f(x)$ et $f(a'_n) \to f(x')$ par continuité de f

On a donc :

$$d_Y(F(x), F(x')) \underset{\text{inég } \Delta}{\leq} \underbrace{d_Y(F(x), f(a_n))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f(a_n), f(a'_n))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f(a'_n), F(x'))}_{< \varepsilon/3}$$

car (!)

$$\underbrace{d_X(a_n, a'_n) \leq \underbrace{d_X(a_n, x)}_{<\delta/3} + \underbrace{d(x,x')}_{<\delta/3} + \underbrace{d(x', a'_n)}_{<\delta/3}}_{<\delta}$$

Ainsi $d_Y(F(x),F(x')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ si $d_X(x,x') < \delta/3$

Conclusion :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 ; \forall x, x' \in X , d_X(x,x') < \delta' \Rightarrow d_Y(F(x),F(x')) < \varepsilon$

$\delta' = \frac{\delta}{3}$ avec les notations ci-dessus

donc F est uniformément continue.

$\boxed{\text{VL}}$

Exemple définition "à l'ancienne" de l'intégrale d'une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$

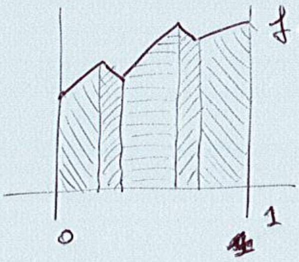
$C^0([0,1],\mathbb{R})$ est complet pour la distance d_∞

$A = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues affines par morceaux $\}$

A est dense dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ c'est une conséquence de la continuité uniforme (donc de la compacité de $[0,1]$ ...)

Il est facile de définir $I : A \to \mathbb{R}$
$f \mapsto I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$

(somme d'aire de trapèzes ...)



On voit facilement que

I est 1-lipschitzienne,

donc uniformément continue.

Elle se prolonge donc de manière unique en $I : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$f \longmapsto$ "$\int_0^1 f(t)\,dt$"

ce nombre est donc encore appelé l'intégrale de f sur $[0,1]$, et noté de la m manière que pour les fonctions affines par morceaux ...

(5) Complétion d'un espace métrique non complet

Théorème Soit (X,d) un espace métrique.

Il existe alors

$$\begin{cases} \text{un espace métrique } \underline{\text{complet}}\ (\tilde{X},\tilde{d}) \\ \text{une application } \varphi : X \to \tilde{X}\ \underline{\text{préservant les distances}} \end{cases}$$

on l'appelle le complété de (X,d)

tels que $\varphi(X)$ soit dense dans $\tilde{X}$

De plus, si $(\tilde{X}_1, d_1, \varphi_1)$ et $(\tilde{X}_2, d_2, \varphi_2)$ sont deux telles solutions au problème,

alors il existe une unique isométrie $\phi : (\tilde{X}_1, \tilde{d}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$

telle que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_1 \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & \tilde{X}_2 \end{tikzcd}$$

[c-à-d telle que $\phi(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)\ \forall x \in X$]

Commentaire Avec les notations du théorème

(1) Si $\varphi : X \to \tilde{X}$ préserve les distances, alors elle est continue (1-lipschitzienne)

et injective (si $\varphi(x) = \varphi(x')$ alors $\underbrace{d_{\tilde{X}}(\varphi(x),\varphi(x'))}_{=0} = d_X(x,x')$, donc $x = x'$)

Donc on peut identifier l'espace métrique (X,d) à son image $\varphi(X)$

munie de la distance induite par $\tilde{d}$. On dit que l'on a plongé (X,d)

dans $(\tilde{X},\tilde{d})$, en tant qu'espace métrique.

(2) Le théorème affirme donc que tout espace métrique peut être plongé

(en tant qu'espace métrique) dans un espace métrique complet.

Mais la densité de $\varphi(X)$ dans $\tilde{X}$ dit que $\tilde{X}$ n'est "pas beaucoup

plus gros" que $\varphi(X)$ [donc que X, si on identifie X et $\varphi(X)$].

On a donc rajouté à X "juste ce qu'il faut" pour qu'il devienne complet...

~~[illegible]~~

③ La dernière partie du théorème ("De plus, ...") montre qu'il y a "unicité du complété à isométrie près" : il n'y a essentiellement qu'une seule manière de compléter ...

dém Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des suites de Cauchy de X

① On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X)$:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ si(déf) } d_X(x_n,y_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

(on montre facilement que c'est bien une rel. d'équivalence)

$\boxed{\text{On note alors } \tilde{X} \text{ l'ensemble des classes d'équivalence de } \mathcal{C}(X) \text{ pour cette relation}}$

Un élément u de $\tilde{X}$ = une classe d'éq de suites de Cauchy de pts de X

② On définit une distance sur $\tilde{X}$:

Soient $u, v \in \tilde{X}$. On en choisit des représentants $\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X) \text{ dans la classe } u \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X) \text{ dans la classe } v \end{cases}$

On montre que :

(i) la limite $\lim\limits_{n\infty} d_X(x_n,y_n)$ existe

[pour cela, montrer que la suite $(d_X(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et utiliser la complétude de $\mathbb{R}$]

(ii) cette limite ne dépend pas du choix des représentants :

si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

alors $\lim\limits_{n\infty} d_X(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\infty} d_X(x'_n,y'_n)$

[facile : $d_X(x'_n,y'_n) \leq \underbrace{d_X(x'_n,x_n)}_{\downarrow n\infty \atop 0} + \underbrace{d_X(x_n,y_n)}_{\downarrow \atop \lim_{n\infty} d_X(x_n,y_n)} + \underbrace{d_X(y_n,y'_n)}_{\downarrow n\infty \atop 0}$

donc $\lim\limits_{n\infty} d_X(x'_n,y'_n) \leq \lim\limits_{n\infty} d_X(x_n,y_n)$

et de m̂ dans l'autre sens, d'où égalité des limites]

On peut donc poser $\boxed{\tilde{d}(u,v) := \lim\limits_{n\infty} d_X(x_n,y_n)}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans la classe u, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ——— v

Topo
IV - 12

On montre que $\tilde{d}$ est bien une <u>distance</u> sur $\tilde{X}$

* $\tilde{d}(u,u) = 0$ évident
* $\tilde{d}(u,v) = \tilde{d}(v,u)$ pareil
* si $u \neq v$ alors (x_n) pas équivalente à (y_n)
  c'est à dire $d_X(x_n, y_n) \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n\infty} d_X(x_n,y_n) \neq 0$ et donc $\tilde{d}(u,v) > 0$
* inég Δ par passage à la limite :

$$d_X(x_n, z_n) \leq d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, z_n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{d}(u,w) \leq \tilde{d}(u,v) + \tilde{d}(v,w)$$

u = classe de (x_n)
v = classe de (y_n)
w = classe de (z_n)

③ <u>On plonge (X,d) dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$</u> :

On définit $X \xrightarrow{\varphi} \tilde{X}$

$x \longmapsto \varphi(x) :=$ la classe d'équivalence de $\underbrace{\text{la suite constante égale à } x}_{\text{c'est bien une suite de Cauchy !}}$

On a bien $d(x,y) = \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y))$

[puisque par définition $\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim\limits_{n\infty} \underbrace{d_X(x,y)}_{\text{ne dépend pas de } n\ldots} = d_X(x,y)$]

④ <u>On montre que $\varphi(X)$ est dense dans $\tilde{X}$</u> :

Soit $u \in \tilde{X}$. On en choisit un représentant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X)$.

Posons $u_n := \varphi(x_n)$ la classe de la suite constante égale à x_n

On montre que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} u$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$, ce qui prouve que $\varphi(X)$ est bien dense dans $\tilde{X}$

[Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq N$, $d_X(x_n, x_p) < \varepsilon/2$ (suite de Cauchy dans X)
Par déf : $\tilde{d}(\varphi(x_n), u) = \lim\limits_{p\infty} d_X(x_n, x_p)$
Si $n \geq N$: $\lim\limits_{p\infty} d_X(x_n, x_p) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ Donc $\tilde{d}(\varphi(x_n), u) < \varepsilon$ si $n \geq N$]

⑤ <u>Pour finir, on montre que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est complet</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy <u>de $\tilde{X}$</u>. Par densité, pour chaque n on peut choisir <u>$x_n \in X$</u> tel que $\tilde{d}(\varphi(x_n), u_n) < \frac{1}{n}$.

On montre qu'alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tq $\forall n,p \geq N$, $\tilde{d}(u_n, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$
Alors
$$d(x_n, x_p) = \tilde{d}(\varphi(x_n), \varphi(x_p)) \leq \underbrace{\tilde{d}(\varphi(x_n), u_n)}_{<1/n} + \underbrace{\tilde{d}(u_n, u_p)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\tilde{d}(u_p, \varphi(x_p))}_{<1/p}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ si } n,p \geq N \text{ et } N \text{ assez grand}$$

Donc elle définit un élément $u \in \tilde{X}$, sa classe d'équivalence !

Et on montre que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} u$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$:

$$\tilde{d}(u_n, u) \leq \underbrace{\tilde{d}(u_n, \varphi(x_n))}_{<1/n} + \underbrace{\tilde{d}(\varphi(x_n), u)}_{= \lim\limits_{p\infty} d(x_n, x_p)}$$

ceci tend vers 0 qd $n \to \infty$ car (x_n) est une <u>suite de Cauchy</u> (!)

Donc $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est bien <u>complet</u>

▨