Exercice 38

(1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z,\ x+3y+z)$

<u>noyau</u> $(x,y,z) \in \ker(f) \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y \quad = 0 \\ 2y \quad = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_2 \end{array}$$

d'où $\ker(f) = \{(x,0,-x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,0,-1)$

en particulier $\dim \ker(f) = 1$

<u>image</u>

(!) on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1))$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,3),(1,1,1))$

$$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,1),(1,-1,3)}_{\text{base de } \mathrm{Im}(f)})$$

$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$

(2) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad g(x,y,z) = (x+2y,\ y,\ x+z)$

<u>variante de rédaction</u> : par les matrices

la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>noyau</u> $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \ker(A) \iff AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x+2y=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

donc $\ker A = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc g est <u>injective</u>, et comme c'est un <u>endo</u>-morphisme, elle est automatiquement <u>surjective</u> (thm du rang)

<u>image</u> g est surjective... donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$!

(!) la bijectivité de g se voyait sur sa matrice A,

en observant que A est <u>inversible</u> :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{différent de } 0$$

(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad h(x,y,z) = x+y+z$

<u>noyau</u> $\mathrm{Ker}(h) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x+y+z \}$

$= \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$ un <u>plan</u>

$\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$

<u>image</u> évidemment $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$

($\mathrm{Im}(h)$ doit être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$...

il n'y a que $\{0\}$ et $\mathbb{R}$, et ce n'est clairement pas $\{0\}$

puisque h n'est pas identiquement nulle)

(4) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad k(x,y) = (x, y, x+y)$

$\mathrm{Ker}(k) = \{(0,0)\}$ clairement donc k est <u>injective</u>

$\mathrm{Im}\, k = \mathrm{Vect}(k(1,0), k(0,1))$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,0,1), (0,1,1)}_{\text{base de } \mathrm{Im}(f)})$ $\quad \dim 2$

(5) $f+g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad (f+g)(x,y,z) = f(x,y,z) + g(x,y,z)$

$= (x+y+z, x-y+z, x+3y+z) + (x+2y, y, x+z)$

donc $(f+g)(x,y,z) = (2x+3y+z, x+z, 2x+3y+2z)$

etc...

(6) $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

$h \circ g\,(x,y,z) = h(x+2y,\, y,\, x+z) = (x+2y) + y + (x+z)$

$= 2x + 3y + z$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\,(h\circ g) = \text{un plan de } \mathbb{R}^3 \text{ (dim 2)} \\ \mathrm{Im}\,(h\circ g) = \mathbb{R} \end{array}\right\}$ comme pour h

(7) oups... on l'a déjà quasiment fait !

$g^{-1}(a,b,c) = ?$ il suffit d'inverser la matrice de g

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ y = b \\ x + z = c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = a - 2b \\ y = b \\ z = -a + 2b + c \end{cases}$

ainsi $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{donc ceci est } A^{-1}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

d'où $g^{-1}(a,b,c) = (a - 2b,\, b,\, -a + 2b + c)$