UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)
ANNÉE : 2019-2020

Feuille d'exercices 4

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1 - EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2, et soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme 2-linéaire et alternée. On suppose que $\varphi(v_1, v_2) = 4$.Calculer $\varphi(2v_1+3v_2, v_1-v_2)$. On justifiera soigneusement chaque étape du calcul.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

Exercice 3. Soit $T = (t_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $\forall i > j, t_{ij} = 0$. Calculer $\det(T)$. Même question si T est triangulaire inférieure.

Exercice 4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $A^k = 0$. Déterminer le déterminant de A.

Exercice 5. Calculer les déterminants des matrices 3×3 suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 6. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On considère la fonction $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.
(a) Montrer que P_A est un polynôme de degré n.
(b) Déterminer le coefficient constant de P_A.
(c) Déterminer les coefficients de X^n et de X^{n-1}.
(d) Que sont les racines de P_A ?

Exercice 8. Calculer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes. En déduire leurs spectres.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 2 & 714 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & -3 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 - Exercices classiques

Exercice 10. Calculer les déterminants des matrices $n \times n$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & \dots & . \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les entrées sont dans $\{1, -1\}$. Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 12. Soit $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ quatre matrices. On considère la matrice $M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ donnée par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

(a) Quand $C = 0$, montrer que $\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

(b) Quand $A = 0$, montrer que $\det(M) = \det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = (-1)^n \det(B)\det(C)$.

(c) Montrer que $\det(M) = \det \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$. *On pourra conjuguer par une matrice de permutation.*

(d) Quand $A = D$ et $B = C$, montrer que

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

(e) Quand $CD = DC$ et $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$. *On pourra multiplier à droite par* $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 13. Soit $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_t := D + tI_n$. Montrer que $f(t) := \det(D_t)$ est une application polynomiale de t ayant limite $+\infty$ en $+\infty$. En déduire que le (d) de l'exercice 12 est encore vrai lorsque D est non-inversible.