Banque « Agro-véto »
B - MP18

MATHEMATIQUES - PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice, d'abaques et de tables est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Cette partie est notée sur 12 points.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$. On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0,1[$ par

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t}, \quad g(t) = \frac{t}{\ln t}, \quad h(t) = \frac{1}{\ln t}, \quad t \in]0,1[.$$

1. Montrer que g et h sont prolongeables par continuité en 0.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
3. Montrer, à l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera, que pour $x \in]0,1[$,
$$\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\,du.$$
4. En utilisant la question précédente, montrer que pour $x \in]0,1[$,
$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln u}\,du.$$
5. Montrer, en justifiant les inégalités avec soin, que pour $x \in]0,1[$,
$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$
6. Calculer pour $x \in]0,1[$,
$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$
7. Justifier l'existence de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt,$$
et déduire sa valeur des questions précédentes.

Exercice 2. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice M_t par

$$M_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 1-t & 0 & t \\ 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout réel t, 0 est valeur propre de M_t.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des réels t tels que M_t est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des réels t tels que M_t est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3. Les parties A et B sont indépendantes.

Soit λ un réel stictement positif et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi définie par

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda n},\ n \in \mathbb{N}.$$

partie A

1. Calculer la probabilité que X soit un nombre pair (on rappelle que 0 est un nombre pair).
2. Montrer que la probabilité calculée dans la question précédente admet une limite quand λ tend vers 0, et la déterminer.

Partie B On considère les sous ensembles E et F de $\mathbb{R}$ définis par

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \text{ et } F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k\pi + \pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi],$$

et N un entier naturel non nul.

3. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(a \leq X \leq a + b)$.
4. Montrer que

$$\mathbb{P}(\frac{X\pi}{2N} \in E) = \frac{1 - e^{-\lambda(N+1)}}{1 - e^{-4\lambda N}} \quad \text{et que} \quad \mathbb{P}(\frac{X\pi}{2N} \in F) = e^{-2\lambda N}\,\mathbb{P}(\frac{X\pi}{2N} \in E).$$

5. Montrer, en le justifiant soigneusement, que

$$\mathbb{P}(\cos(\frac{X\pi}{2N})\sin(\frac{X\pi}{2N}) \geq 0) = \frac{1 - e^{-\lambda(N+1)}}{1 + e^{-2\lambda N}}.$$

6. Montrer que $\mathbb{P}(\cos(\frac{X\pi}{2N})\sin(\frac{X\pi}{2N}) \geq 0)$ admet une limite quand $\lambda = \frac{1}{N}$ et N tend vers $+\infty$, et la déterminer.

Partie PHYSIQUE

Cette partie est notée sur 8 points.

Les valeurs numériques ont été choisies de sorte que les calculs numériques demandés puissent se faire aisément sans calculatrice. Tous les résultats seront exprimés en unités du système international.

Partie A

Un cycliste de 70 kg monte une côte de pente 5% avec un vélo de 10 kg à une vitesse constante v = 9 km/h. On rappelle que la pente est la tangente de l'angle que fait la route avec l'horizontale. On appelle Ox l'axe qui suit la route (incliné d'un angle α avec l'horizontale). On approchera l'accélération de la pesanteur par une valeur de 10 m s^{-2}. On utilisera l'approximation des petits angles pour la tangente ou le sinus : $tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$ où α est exprimé en radian.
Le cycliste mange des gâteaux ayant un apport énergétique de 1600 kJ (380 kcal) pour 100 g dont 25% sont transformés en énergie mécanique.

A1) Faites un schéma en représentant notamment le poids du système cycliste+vélo.

A2) Exprimez et calculez la composante du poids de ce système selon Ox.

A3) Exprimez et calculez le travail de la force de pesanteur sur ce système pour une distance parcourue Δx =1 km.

A4) Exprimez et calculez la variation d'énergie potentielle de gravité de ce système pour une distance parcourue de 1 km.

A5) Exprimez et calculez la valeur absolue de la puissance de la force de gravité.

A6) Quelle est la puissance mécanique minimale que doit fournir le cycliste ?

A7) Quelle masse minimale de gâteaux le cycliste doit-il manger pour compenser son effort physique sur 10 km ?

A8) Que devient le reste de l'apport énergétique des gâteaux ? Quelle puissance thermique le cycliste doit-il dégager ?

Partie B

Le cycliste porte sur une partie de son corps, de surface $S=0,5\ m^2$, un vêtement ayant une épaisseur $e = 5$ mm et ayant une conductivité thermique $\lambda = 0,05\ Wm^{-1}K^{-1}$. La température de surface de la peau (sous le vêtement) est de $T_p = 30°C$; la température de l'air ambiant est de $T_a = 10°C$. On suppose que le vêtement 'colle' à la peau et que la température à la surface extérieure du vêtement est quasiment égale à celle de l'air ambiant.

B1) Enoncez la loi de Fourier.

B2) Montrez qu'en régime permanent, la température varie linéairement dans l'épaisseur du vêtement.

B3) Exprimez et calculez le flux de chaleur (ou puissance thermique) évacué à travers le vêtement.

Le cycliste transpire. L'eau de la transpiration s'évapore et sature l'air en humidité sous le vêtement. La chaleur latente (ou enthalpie) de vaporisation de l'eau vaut environ $L_v = 2400\ kJ.kg^{-1}$.

B4) Exprimez la concentration massique en vapeur d'eau ($kg.m^{-3}$) sous le vêtement : $C_{ve.p}$ connaissant la température de la peau T_p, la pression de vapeur saturante à cette température : $p_{sat}(T_p) = 4240$ Pa, la masse molaire de l'eau : $M_e = 0,018$ kg/mol et la constante des gaz parfaits R : $8,314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$. Quelle valeur numérique faut-il prendre pour T_p dans la relation trouvée ?

On trouve $C_{ve.p} = 0,030\ kg.m^{-3}$, alors que dans l'air ambiant la concentration en vapeur d'eau n'est que de $C_{ve.a} = 0,005\ g.m^{-3}$. On admettra que le flux de vapeur d'eau évacué à travers le vêtement : J ($kg\ s^{-1}$) peut s'exprimer (grâce à une loi similaire à la loi de Fourier appelée loi de Fick) par la relation suivante :

$$J = S\,D\,\frac{C_{ve.p} - C_{ve.a}}{e}$$

où D est la diffusivité apparente de la vapeur d'eau à travers le vêtement et vaut $10^{-5}\ m^2.s^{-1}$.

B5) Calculez le flux de vapeur d'eau (en $kg.s^{-1}$) évacué à travers le vêtement.

B6) Exprimez et calculez le flux de chaleur supplémentaire évacué à travers le vêtement du fait de l'évaporation de la transpiration.

B7) Commentez ces résultats. Quels sont les autres modes d'évacuation de la chaleur ?