BENSA
B – 0215 – MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

———

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.

NB : Tous les résultats seront laissés sous forme d'une expression formelle contenant des puissances, des fractions, des factorielles, des logarithmes ou des exponentielles.

On prendra $e \approx 2.7$, $1/e \approx 1/3$, $\sqrt{3} \approx 1.7$ ...

Premier exercice :

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n, indexée par n, définie pour x appartenant à $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} \text{ pour } x > 0$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n pour $x > 0$, calculer sa dérivée.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n pour $x = 0$.
3) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.
4) Donner le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(u) = e^{-u} - (1-u)$
5) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
$$0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$
On pourra admettre ce résultat dans un premier temps, et faire la suite (on pourra aussi étudier le signe de $g(u)-u^2/2$ pour $u > 0$).
6) On note Cf_n, la courbe représentative de f_n en repère orthonormé d'unité 4cm. Trouver une asymptote D_n à la courbe Cf_n, pour x tendant vers $+\infty$.

Donner les positions relatives de la courbe et de son asymptote.

Donner les positions relatives de la courbe Cf_n, et de la courbe Cf_k, pour $n > k$.

Tracer l'allure de Cf_1 et Cf_2, ainsi que leurs asymptotes.

Deuxième exercice :

Dans une fête foraine, une machine de jeu pour enfant distribue, contre une pièce de 1 euro, une boîte cadeau, contenant
- soit une figurine de collection, avec une probabilité 1/3,
- soit un petit sachet de bonbons, avec la probabilité 2/3.

Les distributions successives sont supposées indépendantes.

1) Un premier enfant A vient avec 5 pièces de 1 euro qu'il insère successivement dans la machine (les résultats sont supposés indépendants). Soit X, la variable aléatoire donnant le nombre de figurines obtenues par A, donner sa loi (en justifiant votre choix), puis son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité que A reparte avec une figurine au moins ?
2) Deux frères C et D arrivent ensuite. Ils ont mutualisé leurs économies, soit 10 euros au total. Ils décident de jouer leurs 10 pièces jusqu'à avoir si possible deux figurines, une pour chacun. Trois cas sont alors possibles :
a) Les 10 euros sont épuisés et ils n'ont obtenu aucune figurine. Quelle est la probabilité de cet événement ?
b) Ils ont leurs deux figurines en k essais, $2 \leq k \leq 10$. Ils décident alors de se partager l'argent qui reste. Quelle est la probabilité qu'il leur reste 4 euros à se partager ? Et qu'il ne leur reste rien ?
c) Ils n'ont obtenu qu'une figurine en dix essais. Quelle est la probabilité de cet événement ? Ils décident alors de la tirer au sort (avec équiprobabilité). Quelle est la probabilité que C remporte la figurine ?
3) Compte tenu de ces trois cas possibles, donner une formule pour le calcul de la probabilité que C reparte avec exactement une figurine.

Troisième exercice :

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On rappelle qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées *(x ; y)* dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et qu'un point M du plan a pour coordonnées *(x ;y)* dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On considère l'application linéaire *f* qui à tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées *(x ; y)* dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ associe le vecteur $f(\vec{u})$ de coordonnées $(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y; \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y)$; toujours dans la base $(\vec{i};\vec{j})$, soit A la matrice de *f*.

1) Donner la matrice A.
2) Calculer son déterminant, A est-elle inversible ?
3) Cette matrice admet-elle des valeurs propres réelles ?

Soit A_0 un point du plan de coordonnées *(x ; y)*, $A_0 \neq (0;0)$ et $\overrightarrow{u_0}$ le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$.
Soit $\overrightarrow{u_1} = f(\overrightarrow{u_0})$ et A_1 le point du plan défini par $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{u_1}$.

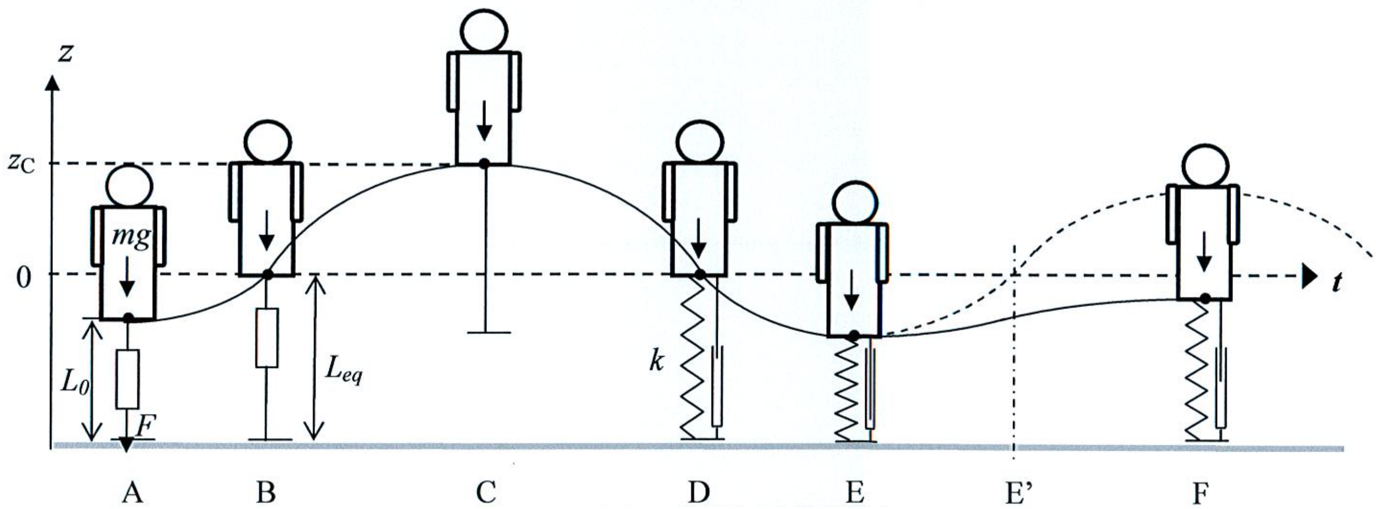
4) Montrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle.
5) Donner le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_1})$.

PHYSIQUE:
Un petit saut pour l'homme

Après avoir fléchi ses jambes, un homme

- actionne ses muscles pour sauter verticalement vers le haut (passage de l'état A à l'état B sur le schéma ci-dessous),
- décolle du sol et s'élève dans l'air (B à C),
- retombe jusqu'à toucher à nouveau le sol (C à D),
- plie ses jambes (D à E) en emmagasinant de l'énergie élastique et en amortissant le choc,
- puis se redresse jusqu'à une position d'équilibre légèrement fléchie (E à F).

On s'intéresse au mouvement du corps de l'homme : son tronc, sa tête et ses bras, que l'on assimile à un solide de masse m.
Les jambes ne font pas partie de ce solide, elles ont une hauteur variable L.
Entre A et B, ses jambes agissent comme un vérin de masse négligeable, de longueur initiale L_0 et de longueur maximale L_{eq}. Ce vérin exerce une force de norme F constante de ses pieds vers le sol et inversement il exerce sur le corps de l'homme une force de même norme F vers le haut.
Entre B et C, le corps de l'homme est uniquement soumis à la force de gravité (accélération de la pesanteur : g).
Entre D et F, ses jambes agissent comme un ressort et un amortisseur en parallèle. Le ressort a une longueur à vide égale à L_{eq} et une raideur k.
Si l'amortissement est nul ou faible, l'homme peut éventuellement redécoller en E'.
On note t le temps.
On note z l'altitude du bas du solide (sommet des jambes)
z est considéré comme nul lorsque $L=L_{eq}$.
On note v la vitesse verticale du solide.
On note t_A , z_A, v_A les valeurs de ces variables à l'état A; t_B , z_B, v_B à l'état B et ainsi de suite.



Extension : de A à B. La vitesse initiale v_A est nulle. On prendra t_A =0.

1) Effectuer le bilan des forces exercées sur le corps de l'homme.
2) Exprimer l'accélération du corps de l'homme en fonction de $z(t)$ ou de ses dérivées.
   Ecrire l'équation différentielle permettant de prédire l'évolution de z en fonction du temps t .
3) Résoudre cette équation et exprimer $z(t)$ en fonction de F , m, g, L_{eq}, L_0 et t.

4) En déduire l'expression de t_B et v_B en fonction de F, m, g, L_{eq} et L_0.
5) Exprimer le travail de la force du vérin sur le corps : W.
6) Retrouver l'expression de v_B par le théorème de l'énergie mécanique.

Saut : de B à D.
7) Ecrire l'équation différentielle permettant de prédire l'évolution de z en fonction du temps t.
8) Résoudre cette équation et exprimer $z(t)$ en fonction de v_B, g, t et t_B.
9) En déduire l'expression de l'altitude maximale z_C et de la vitesse à l'atterrissage v_D en fonction de v_B, m, g en utilisant les résultats de la question précédente.
10) Retrouver l'expression de z_C et de v_D à partir du théorème de l'énergie mécanique.

Réception purement élastique : de D à E'. Dans les questions 11 à 19, on néglige l'amortissement. Les jambes sont maintenant considérées comme un simple ressort sans masse.
11) Effectuer le bilan des forces exercées sur le corps de l'homme.
12) Exprimer l'effort exercé par les jambes (considérées comme un ressort de longueur à vide L_{eq} et de raideur k) sur le corps en fonction de z et de k.
13) Ecrire l'équation différentielle permettant de prédire l'évolution de z en fonction du temps t.
14) Montrer que $z=a+b.\sin(\omega.(t-t'))$ est solution de cette équation pour des valeurs particulières de a et ω. Exprimer a et ω en fonction k, m et g. On vérifiera l'homogénéité dimensionnelle de ces expressions.
15) Exprimer l'altitude minimale z_E en fonction k, m, g et b.
16) Ecrire (sans les résoudre) les deux équations permettant de déterminer b et t' en fonction de t_D, v_D, a et ω.
17) Montrer que la force exercée par le ressort est conservative avec une énergie potentielle égale à $k.z^2/2$.
18) En déduire z_E en fonction de v_D, k, m et g.
19) Exprimer la vitesse de redécollage $v_{E'}$ en fonction de v_D et éventuellement de k, m et g.

Réception amortie : de D à F. Une force supplémentaire est exercée par les jambes sur le corps de l'homme : $F_a=-\alpha.v$.
20) Effectuer le bilan des forces exercées sur le corps de l'homme.
21) Ecrire (sans la résoudre) l'équation différentielle permettant de prédire l'évolution de z en fonction du temps t.

Application numérique.
F=1000 N ; z_A=-0.20 m ; g = 10 m.s^{-2} ; m=50 kg; k=10^4 N.m^{-1}
22) Calculer v_B (cf. questions 4 ou 6)
23) Calculer z_C (cf. questions 9 ou 10)
Les calculs se font aisément sans calculatrice.

L'homme se trouve maintenant sur la lune, l'accélération de la pesanteur y est de 1,6 m.s^{-2} soit 6 fois plus faible que sur Terre. Du fait du scaphandre, la masse m atteint 86 kg au lieu de 50 kg ; ceci fait que v_B a quasiment la même valeur que sur Terre. Indiquer le changement attendu sur z_C.

FIN DE L'ÉPREUVE