BENSA
B – 214MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes.

ANALYSE

On considère la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si $x\neq 0$,

et $f(0)=1$.

On note *C* sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Développement limité de ln(1+*x*).

Donner un développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

2) Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}.$$

a) Montrer que *g* est dérivable et calculer $g'(x)$.

b) Prouver que pour tout $x>0$: $\quad 0\leq g'(x)\leq \dfrac{x^2}{4}$.

c) En déduire que pour tout $x>0$: $\quad 0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}$.

3) Variations de la fonction *f*.

a) Montrer que *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Etablir que pour tout réel $x\geq 0$:

$g(x)\leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$. En déduire le sens de variation de *f*.

4) Etude de *f* en $+\infty$ et en 0.

a-1) Etudier la limite de *f* en $+\infty$.

a-2) Déterminer la limite de *f* en 0, *f* est-elle continue en 0?

b) Prouver que $\lim\limits_{x\to} \frac{x - n(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

c) En déduire que *f* est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en ce point. Donner une équation de la tangente *T* à *C* en 0 et préciser la position de *C* par rapport à *T*.

5) Dresser le tableau des variations de *f*, puis donner l'allure de *C* et tracer *T*.

PROBABILITES

Dans le tableau rectangulaire ci-dessous, *X* est le numéro de la ligne, 1 ou 2, et *Y* est le numéro de la colonne, 1, 2, ou 3.

X / Y	Y=1	Y=2	Y=3
X=1	-9	-6	+12
X=2	15	0	-9

On considère le jeu suivant :
Deux tirages au sort indépendants, l'un donnant la valeur de *X* et l'autre de *Y,* permettent à un joueur de se voir attribuer la somme G inscrite dans la case correspondante, gain si celle-ci est strictement positive, perte si elle est strictement négative, ou rien s'il tombe sur la case 0.

1) Tirages équiprobables.

Dans cette partie, *X* et *Y* sont tirés de manière équiprobable, c'est-à-dire que *X* vaut 1 ou 2 avec la probabilité 1/2, et *Y* vaut 1 ; 2 ou 3 avec la probabilité 1/3.

a) Calculer $P\,(G > 0)$, la probabilité que le gain soit strictement positif.

b) Calculer l'espérance de *G*. Donner l'expression de sa variance, sans effectuer le calcul.

c) Pour 1 euro, le joueur a le droit de jouer 2 fois, c'est-à-dire qu'il obtiendra deux gains $G1$ et $G2$ qu'il va cumuler. Les tirages sont supposés indépendants.

Son bilan financier est $B = G1 + G2 - 1$. On dit que le jeu est équitable si le bilan financier est d'espérance nulle. Ce jeu est-il équitable ?

d) Jo joue à ce jeu, et il décide d'adopter la stratégie suivante : s'il gagne la première fois, c'est-à-dire si $G1 > 0$, il renonce à son deuxième essai, sinon il rejoue. Cette stratégie vous parait-elle assurer un meilleur bilan financier plutôt que de jouer les deux fois ?

2) Tirage de X non équiprobable.

Dans cette partie, X vaut 1 avec la probabilité p et 2 avec la probabilité $1-p$; par contre Y est tiré de manière équiprobable.

a) Calculer p pour que l'espérance de G soit nulle.

b) Calculer $P(G > 0)$, $P(G > 0 / X=2)$ pour cette valeur de p.

c) Jo fait 6 essais, les tirages sont toujours supposés indépendants, il décide de jouer jusqu'à ce qu'il ait un gain strictement positif. Quelle est la probabilité que cet événement n'arrive jamais ?

ALGEBRE LINEAIRE

La question 4 est indépendante des questions 1, 2, et 3.

On désigne par (e_1 ; e_2) la base canonique de $\mathbb{R}$, et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

1) L'endomorphisme u est-il bijectif ? Dans ce cas donner la matrice de sa bijection réciproque.

2) Déterminer une base (v_1 ; v_2) de $\mathbb{R}$ dans laquelle la matrice B de l'endomorphisme u soit de la forme suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Donner la (ou les) valeurs propres de u ainsi que le (ou les) sous espaces propres associés. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

4) On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$$

Où x et y sont des fonctions du temps t, vérifiant les conditions initiales suivantes :

Pour $t = 0$, $x(0) = 2$ et $y(0) = 1$.

a) On pose $z = x - y$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle $z' = 2z$ avec la condition initiale $z(0) = 1$.

b) Donner l'expression de z en fonction du temps.

c) En déduire celles de x et de y.

PHYSIQUE

Une bouteille de vin

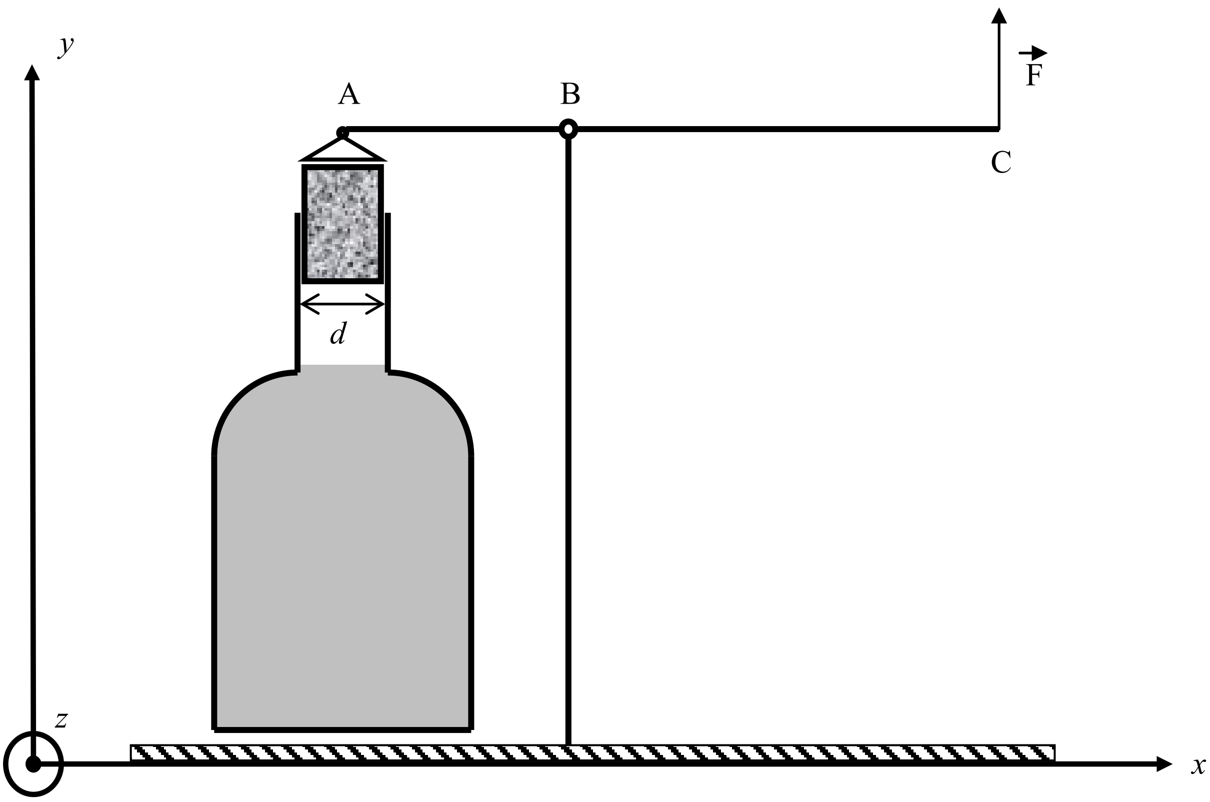
Pour certaines questions, on demande d'exprimer le résultat sous forme littérale et numérique en fonction des données de l'énoncé. Dans ce cas, on posera le calcul en utilisant les unités fondamentales (m, s…) ou dérivées (N, Pa, J…) du système international (même si les données de l'énoncé sont exprimées dans d'autres unités) mais sans effectuer le calcul. Ainsi à la question 'exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour qu'un véhicule roulant à v=50 km/h parcoure une distance de L=100 km', il faudrait répondre :

$$t = L/v = \frac{100.10^3 \text{ m}}{(50.10^3 / 3600) \text{ m/s}}$$

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A) Bouchage

Le schéma ci-dessous représente un dispositif servant à enfoncer un bouchon dans le goulot d'une bouteille. Un levier (AC) pivote sans frottement autour d'un axe horizontal passant par B (axe perpendiculaire au plan du schéma, orienté selon z). On considère d'abord le cas particulier où le levier est horizontal et où l'on applique une force $\vec{F}$, de norme F, vers le haut au bout du levier (en C). Les longueurs $d1$=AB et $d2$=BC valent respectivement 5 et 15 cm. Le diamètre du bouchon est noté d.



A.1) Exprimer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe passant par B et orienté selon z (le moment d'une force par rapport à un axe est également appelé 'couple'). On comptera positivement les moments des forces qui agissent dans le sens trigonométrique.

Dans les questions A.2 et A.3, pour le calcul des moments des forces, on admettra que tout se passe comme si les forces s'appliquaient au point A.

A.2) On note F_f la norme de la force de frottement qu'exerce le goulot sur le bouchon. Lorsque le bouchon est en train d'être enfoncé, dans quelle direction et dans quel sens cette force est-elle orientée ? Exprimer le moment de cette force par rapport à l'axe passant par B.

A.3) On note p la pression du gaz situé entre le liquide et le bouchon. Exprimer le moment de la force de pression exercée par ce gaz sur le bouchon par rapport à l'axe passant par B.

Dans les questions A.4 à A.6, on négligera les effets d'accélération, c'est-à-dire que l'on appliquera les lois d'équilibre statique d'un solide.

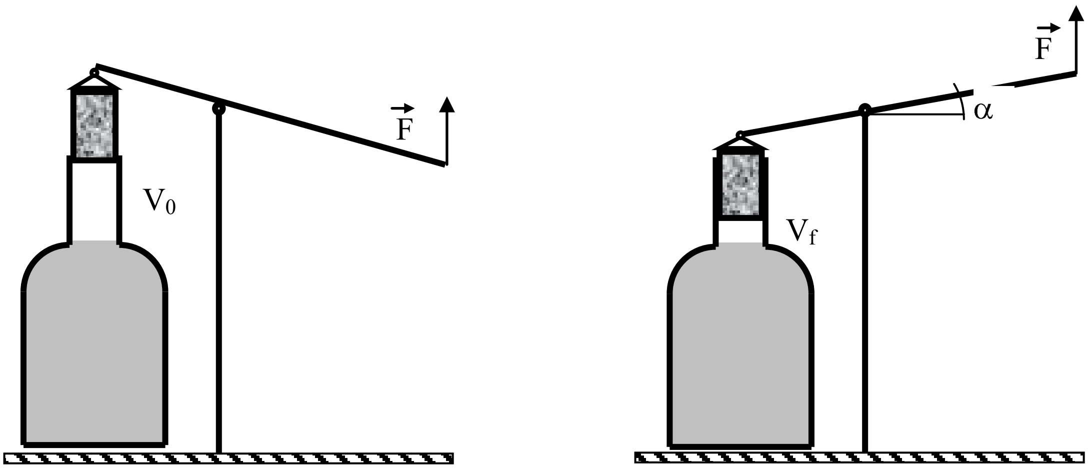
A.4) Exprimer l'équilibre des efforts exercés sur le levier (du point de vue de la rotation autour de l'axe passant par B) en négligeant les forces de gravité exercées sur le levier.

A.5) En déduire l'expression de la norme de la force $\vec{F}$ à exercer pour enfoncer le bouchon en fonction de p, F_f, d, $d1$ et $d2$.

A.6) Exprimer la norme de la réaction, notée R, exercée par le pivot sur le levier en fonction de F, F_f, p et d.

Le schéma ci-dessous montre les configurations initiale et finale

A.7) Exprimer le moment de la force $\vec{F}$ (toujours dirigée verticalement vers le haut avec une norme notée F) par rapport à l'axe passant par B lorsque le levier fait un angle α avec l'horizontale.



Le gaz contenu dans la bouteille est considéré comme un gaz parfait de masse molaire égale à M=29 g.mol^{-1}. Son volume initial V_0 est de 10 cm^3, sa température initiale T_0 de 10°C, sa pression initiale p_0 de 1,013 10^5 Pa. On rappelle que la constante des gaz parfaits vaut R=8,314 J.mol^{-1}K^{-1}.

A.8) Exprimer sous forme littérale et numérique la masse de gaz.

Le bouchon est enfoncé sur toute sa hauteur h=2,5 cm. Le diamètre du bouchon (égal au diamètre intérieur du goulot) vaut d=18 mm. On considère que la bouteille est indéformable, que le liquide est incompressible et qu'il n'y a pas de fuite de gaz entre le bouchon et le goulot ou à travers le bouchon.

A.9) Exprimer sous forme littérale et numérique le volume restant de gaz : V_f .

A.10) On suppose que la température du gaz reste constante et qu'il ne se dissout pas dans le liquide. Exprimer la pression finale en fonction de la pression initiale, du volume initial et du volume final.

Partie B) Chambrage

A l'instant t=0, la bouteille (fermée) est sortie de la cave où la température était de T_0=10°C et placée dans une pièce à T_a=20°C. On considère que la masse de la bouteille (et donc son inertie thermique) est négligeable devant celle du liquide et que les écarts de température au sein du liquide sont négligeables devant l'écart de température entre l'air (T_a) et celle du liquide notée T.
Le volume de liquide V_L est de 75 centilitres, sa masse volumique de ρ=980 kg.m^{-3} et sa capacité thermique massique c=3700 J.kg^{-1}.K^{-1}.

B.1) Exprimer sous forme littérale et numérique la variation d'énergie interne du liquide lorsque sa température passe de T_0=10 à T_a =20°C.

Le flux de chaleur échangé avec l'air est le produit de la surface d'échange S=0,06 m², du coefficient de transfert de chaleur h=10 W.m^{-2}.K^{-1} et de l'écart de température entre l'air et le liquide.

B.2) En exprimant le premier principe de la thermodynamique sur un petit intervalle de temps dt, au cours duquel la variation de température est notée dT, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température du liquide au cours du temps.

B.3) Exprimer la solution de cette équation.

B.4) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour que le liquide atteigne T_{id}=17°C : sa température idéale de dégustation.

FIN DE L'ÉPREUVE