Concours B ENSA
B-0213MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

———

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes.

PARTIE 1 .

Les parties **1 A** et **1 B** sont indépendantes

PARTIE **1 A**

On note (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2) les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Soit l'application linéaire *f* définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{array}{l} f(e_1) = e'_1 + 2e'_2 \\ f(e_2) = 2e'_1 + 4e'_2 \\ f(e_3) = e'_1 - 4e'_2 \end{array}$

a) Ecrire la matrice de *f* dans les bases canoniques.
b) Déterminer une base de *Ker f.*
En utilisant le théorème du rang que vous énoncerez, déterminez le rang de *f* puis une base de *Im f.*

PARTIE **1 B**.

Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé pour une matrice carrée.
b) Calculer le rang de g, en déduire sans calcul une valeur propre simple de g.
c) Vérifier que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de g.

d) Soient les matrices $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}$

Diagonaliser C et D.
(Vous préciserez les valeurs propres et une base de chaque espace propre).

e) Vérifier que les valeurs propres obtenues sont les valeurs propres de la matrice A associées

à des vecteurs propres du type : $\begin{pmatrix}0\\0\\a\\b\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}c\\d\\0\\0\end{pmatrix}$

PARTIE 2.

Soit la fonction d'une variable réelle f définie sur $D=[0;+\infty[$ par : $f(x)=xe^{\frac{x}{1+x}}$.
On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
On prendra $2,7$ *comme valeur approchée de* e.

a) Montrer que f est dérivable sur D et calculer f'.
b) Etudier les variations de f sur D et calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
c) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 (on pourra calculer $f'(0)$ et $f''(0)$). En déduire l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 et la position de la courbe C_f par rapport à T au voisinage de 0.
d) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{-1}{1+x}}-1)=-1$ puis déterminer a et b pour que la droite Δ d' équation $y=ax+b$ soit asymptote à la courbe C_f quand x tend vers $+\infty$.
e) Tracer l'allure de C_f, on tracera aussi T et Δ.

PARTIE 3.

Dans cette partie, les résultats n'ont pas à être effectués.

On lance 5 fois de suite et de façon indépendante une pièce équilibrée comportant un côté "Pile" et un côté "Face". On définit deux variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

X est le rang du premier "Pile" obtenu (X prendra la valeur 0 si "Pile" n'est pas obtenu).
Y est le nombre de "Face" obtenu.

a) Calculer p((X = 4) ∩ (Y = 2)) ; p((X = 3) ∩ (Y = 2)) ; p((X = 2) ∩ (Y = 2)).
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Donner en justifiant la loi de Y, son espérance et sa variance.
c) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance.
d) Déterminer la loi du couple (X ; Y).

PHYSIQUE

La crème du lait

Pour certaines questions, on demande d'exprimer le résultat sous forme littérale et numérique en fonction des données de l'énoncé. Dans ce cas, on posera le calcul en utilisant les unités fondamentales (m,s…) ou dérivées (N,Pa,J…) du système international (même si les données de l'énoncé sont exprimées dans d'autres unités) mais sans effectuer le calcul. Ainsi à la question « exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour qu'un véhicule roulant à v=50 km/h parcoure une distance de L=100 km », il faudrait répondre :

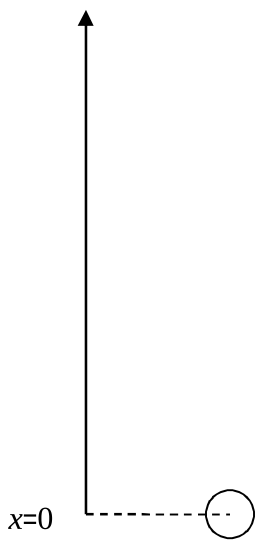
$$t = L/v = \frac{100.10^3 \text{ m}}{(50.10^3 / 3600) \text{ m/s}}$$

On considère que la matière grasse du lait se trouve sous forme de globules sphériques indéformables en suspension dans une phase aqueuse qui correspond au lait écrémé.

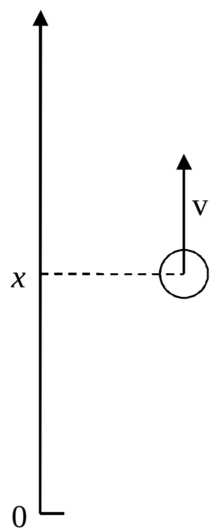
La masse volumique de la matière grasse vaut ρ_{mg} = 950 kg.m^{-3} ; la masse volumique de la phase aqueuse vaut ρ = 1040 kg.m^{-3} ; la viscosité de la phase aqueuse vaut η= 2,10 10^{-3} Pa.s. L'accélération de la pesanteur vaut g=9,81 m.s^{-2}.

On considère que le lait naturel de vache comporte des globules de gras ayant un diamètre d=5 microns (en réalité, il y une distribution granulométrique autour de cette valeur). A l'instant initial on suppose que leur vitesse est nulle. On notera x la position verticale d'un globule de gras dont la position initiale est x=0. Tous les vecteurs sont comptés positivement vers le haut.

Instant initial (t=0)



Instant t >0



Partie A) Absence de frottement

On néglige dans un premier temps les forces de frottement exercées par le liquide sur un globule de gras.

A.1) Exprimer sous forme littérale et numérique le volume V d'un globule de gras.

A.2) Exprimer sous forme littérale et numérique la norme du poids d'un globule de gras.

A.3) Exprimer sous forme littérale et numérique la norme de la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression statique) exercée par la phase aqueuse sur un globule de gras. On admettra que la poussée d'Archimède s'exerce de façon inchangée si le globule de gras est en mouvement dans le liquide au repos.

A.4) Exprimer la composante verticale de la somme du poids et de la poussée d'Archimède. Est-elle positive ? Qu'est ce que cela entraîne ?

A.5) Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la position x du globule de gras en fonction du temps (en négligeant les forces de frottement).

A.6) Donner la solution de cette équation différentielle.

A.7) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour que le globule de gras ait parcouru une distance L=1 cm. Ce temps dépend-t-il de la taille du globule de gras ?

A.8) Exprimer sous forme littérale et numérique la vitesse atteinte par le globule de gras lorsqu'il a parcouru une distance L=1 cm.

A.9) Retrouver le résultat de la question A.8 en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Partie B) Prise en compte du frottement

On admettra qu'une sphère se déplaçant à faible vitesse dans un liquide visqueux au repos est soumise à des forces de frottement de la part du liquide

- dans la direction opposée à son vecteur vitesse
- de norme égale à $6\ \pi\eta r\ v$

Où η est la viscosité dynamique du liquide, r est le rayon de la sphère et v la vitesse de la sphère.

B.1) Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la position x du globule de gras en fonction du temps en tenant compte des forces de frottement.

B.2) Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse v du globule de gras en fonction du temps en tenant compte des forces de frottement.

B.3) Donner la solution de l'équation différentielle portant sur la vitesse.

B.4) Exprimer sous forme littérale et numérique la valeur, appelée vitesse limite, vers laquelle tend la vitesse au bout d'un temps suffisamment long.

B.5) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour que la vitesse atteigne 90% de la vitesse limite. Ce temps dépend-t-il de la taille du globule de gras ?

Dans la suite, on néglige la durée, extrêmement brève, pendant laquelle le globule de gras accélère avant d'atteindre sa vitesse limite.

B.6) Exprimer la vitesse limite en fonction du diamètre du globule, de l'écart de masse volumique entre le liquide et la matière grasse, de l'accélération de la pesanteur et de la viscosité du liquide. A défaut d'avoir répondu à la question B.4, on peut répondre à cette question en écrivant un bilan des forces (absence d'accélération).

B.7) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour que le globule de gras ait parcouru une distance L=1 cm. Ce temps dépend-t-il de la taille du globule de gras ?

B.8) Pour un globule de gras d'un lait naturel de vache (d=5 microns), le temps nécessaire pour parcourir 1cm vaut environ 5h. A quel phénomène peut-on s'attendre si on laisse reposer du lait entier naturel pendant quelques heures ?

B.9) Pour éviter ce phénomène dans le cas du lait longue conservation (dit UHT), on fragmente les globules de gras pour qu'ils atteignent une taille d'environ 0,5 micron. Combien de temps faut-il alors pour que la décantation s'opère sur 1cm ? (en réalité des forces électrostatiques répulsives entre les globules de gras font que l'émulsion est stable bien plus longtemps).

FIN DE L'ÉPREUVE