MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.

NB : Tous les résultats seront laissés sous forme d'une expression formelle contenant des puissances, des fractions, des factorielles, des logarithmes ou des exponentielles.
On prendra $\ln 2 \simeq 0,7$ et $1/e \simeq 1/3$

1 Analyse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = (1+1/x)\ln(x)$,

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer sa dérivée f'.
b) On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $h(x) = 1+ x - \ln(x)$.
Faire une étude des variations de h, et en dresser le tableau. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$.
c) Déduire de la question précédente le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau des variations de f et calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
d) On appelle C la courbe représentative de la fonction f en repère orthonormé d'unité 2cm. Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1. Tracer C et T.
e) On note A l'aire de la surface située entre la courbe C et l'axe des x, pour x compris entre 1 et 2. Hachurer cette surface. Calculer A.

2 Probabilités

Un test pour le dépistage d'une maladie étant en phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes :

Lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de 0,95.
Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de 0,02.

a) On sait que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4%. Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité qu'elle ne soit pas malade.
b) 100 personnes de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants), montent dans un avion. Soit X le nombre de personnes parmi elles, qui sont malades. Donner la loi de X, son espérance, et sa variance. Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.
c) Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

3 Algèbre linéaire

Soit B une matrice (3,3) à valeurs réelles, et I la matrice identité de taille (3,3).

a) Simplifier les expressions suivantes: $(I - B + B^2)(I + B)$ et $(I + B)(I - B + B^2)$.

b) Soit A la matrice définie par: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = A - I$

Calculer B^2 et B^3.

c) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

d) Donner les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ? Justifier.

PHYSIQUE (pages suivantes)

PHYSIQUE

Une cerise dans un arbre

Pour certaines questions, on demande d'exprimer le résultat sous forme littérale et numérique en fonction des données de l'énoncé. Dans ce cas, on posera le calcul en utilisant les unités fondamentales (m,s…) ou dérivées (N,Pa,J…) du système international (même si les données de l'énoncé sont exprimées dans d'autres unités) mais sans effectuer le calcul. Ainsi à la question 'exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour qu'un véhicule roulant à v=50 km/h parcoure une distance de L=100 km', il faudrait répondre :

$$t = L/v = \frac{100.10^3\ \text{m}}{(50.10^3 / 3600)\ \text{m/s}}$$

Le problème consiste d'une façon générale à prédire l'évolution de la température et de la position d'une cerise (attachée à un arbre) soumise à des conditions (ensoleillement, vitesse et température d'air) variables.

La cerise est considérée comme une boule homogène de diamètre D=1,5 cm. Elle sera modélisée comme une phase homogène incompressible de capacité thermique constante.

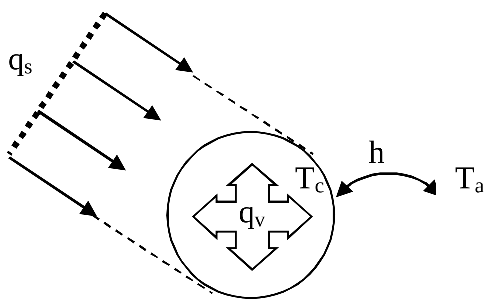
Les propriétés de l'air (indice a) et de la cerise (indice c) sont supposées constantes et égales aux valeurs suivantes

- masse volumique : ρ_a= 1,205 kg.m^{-3} ρ_c= 1050 kg.m^{-3}
- capacité thermique massique : $c_{p.a}$= 1006 J.kg^{-1}.K^{-1} c_c= 3850 J.kg^{-1}.K^{-1}
  (à pression constante pour l'air)
- conductivité thermique : λ_a= 0,0256 W.m^{-1}.K^{-1} λ_c= 0,550 W.m^{-1}.K^{-1}
- viscosité dynamique : η_a= 18,5 10^{-6} Pa.s

Au niveau thermique, on suppose que tout le flux solaire incident est transformé en chaleur à la surface de la cerise. Le flux solaire traversant une section perpendiculaire aux rayons lumineux de 1m² est appelé irradiance solaire. En l'absence de nuage on considère que l'irradiance solaire est q_s=200 W.m^{-2} (la cerise n'est pas dans l'ombre d'une feuille) et on suppose que le flux solaire est négligeable quand un nuage passe. En l'absence de nuage, la cerise intercepte donc un flux d'énergie solaire égal à : $(\pi D^2/4).q_S$

Du fait du métabolisme, la cerise est également le siège d'un dégagement de chaleur volumique q_v=2000 W.m^{-3} supposé indépendant de la température.

Enfin la cerise échange de la chaleur avec l'air, proportionnellement à sa surface et à l'écart de température entre la surface de la cerise et l'air. Le coefficient de proportionnalité, noté h (en W.m^{-2}.K^{-1}) est appelé coefficient de transfert de chaleur.



Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment
La question A6 peut être traitée à partir des équations de l'énoncé de la question A5

A) Transferts thermiques

Le coefficient de transfert de chaleur vaut $h = 10\ W.m^{-2}.K^{-1}$
La température de la cerise est supposée uniforme (elle est identique entre le cœur et la surface, entre la face éclairée par le soleil et la face opposée), elle est notée T_c.
La température de l'air est constante et vaut $T_a = 293.15$ K (soit 20°C).

A.1) Exprimer sous forme littérale et numérique : la surface de la cerise et le volume de la cerise.

A.2) Montrer qu'en l'absence de nuage, le bilan thermique de la cerise en régime permanent s'écrit :

$$\frac{D^2}{4}q_S + \frac{D^3}{6}q_v = D^2 h(T_c - T_a)$$

A.3) En déduire l'expression sous forme littérale et numérique de la température de la cerise en l'absence et en présence de nuages.

A.4) Montrer qu'en régime transitoire l'évolution de la température de la cerise peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$m_c c_c \frac{dT_c}{dt} = P$$

où m_c est la masse de la cerise
et P est le flux net de puissance thermique (reçu du soleil, dégagé par le métabolisme, échangé avec l'air) c'est-à-dire la chaleur nette reçue par unité de temps.

On pourra pour cela écrire un bilan thermique de la cerise entre l'instant t où la température de la cerise est $T_c(t)$ et l'instant t+dt où la température de la cerise est $T_c(t+dt)=T_c(t)+dT_c$.

A.5) Exprimer m_c et P en fonction des données de l'énoncé et de T_c , en déduire que l'équation d'évolution de T_c peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dT_c}{dt} + \frac{T_c}{\tau} = \frac{\alpha_n}{\tau} \quad \text{en présence de nuages} \qquad \text{et} \qquad \frac{dT_c}{dt} + \frac{T_c}{\tau} = \frac{\alpha_s}{\tau} \quad \text{en présence de soleil}$$

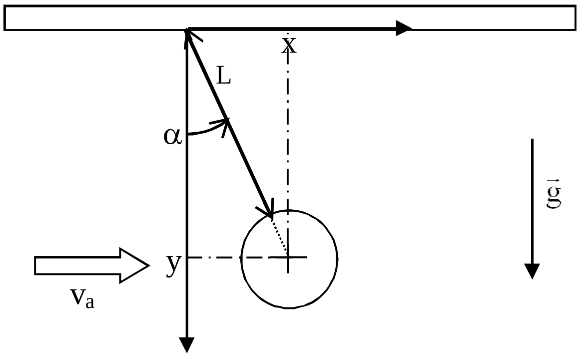
et donner l'expression et l'unité de τ, α_n et α_s.

A.6) On passe, à l'instant t=0, d'une longue période de temps nuageux à une longue période de temps ensoleillé. Exprimer, pour t>0, l'évolution de T_c en fonction du temps ainsi que de τ, α_n et α_s .

A.7) Tracer l'allure de la courbe montrant l'évolution de T_c en fonction du temps. Tracer la tangente à l'origine et faire apparaître la grandeur τ sur le graphique.

Mécanique

La cerise, considérée comme une boule de diamètre D=1,5 cm, est attachée à une branche fixe par l'intermédiaire d'un pédoncule, de longueur L=4 cm, qui se comporte comme un fil infiniment souple. On rappelle que $g=9{,}81\ m.s^{-2}$.



B) Inclinaison du pédoncule en présence de vent

L'air a une vitesse v_a constante dans la direction x de 5 $m.s^{-1}$. Il exerce une force f_x dans la direction x sur la cerise qui est fonction de la vitesse par l'expression suivante :

$$f_x = C_x \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2} \rho_a v_a^2$$

Si le nombre de Reynolds Re= $\frac{\rho_a v_a D}{\eta_a}$ est plus grand que 1000, on a C_x =0,44.

B.1) Ecrire le bilan des forces qui s'exercent sur la cerise.

B.2) Vérifier que le nombre de Reynolds est plus grand que 1000.

B.3) Exprimer l'équilibre des forces dans les directions x et y (schéma ci-dessus) et en déduire l'expression littérale et numérique de l'angle α d'inclinaison du pédoncule avec la verticale.

C) Oscillation

En l'absence de vent et de frottement, si l'angle α d'inclinaison du pédoncule avec la verticale reste petit, le principe fondamental de la dynamique permet d'établir que :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

C.1) Exprimer la valeur de ω en fonction de g et de L telle que $\alpha=\alpha_0 \cos(\omega t)$ soit solution de cette équation différentielle.

C.2) Exprimer de façon numérique la période d'oscillation de la cerise (c'est en secouant la branche avec cette période que l'on fait tomber le plus facilement les cerises, si elles sont mûres).

FIN DE L'ÉPREUVE