Concours B ENSA
B – 0211MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.

Analyse

Les trois premières questions sont indépendantes.

1) Donner un développement limité à l'ordre trois, au voisinage de zéro de la fonction de la variable réelle $u \mapsto e^u$.

2) On considère la fonction f de la variable réelle définie par $x \mapsto f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.
Étudier f et donner l'allure de sa courbe représentative Cf dans un repère orthonormé d'unité *2cm.*

3) On considère la fonction g de la variable réelle définie pour x strictement positif par $x \mapsto g(x) = x^2 e^{1/x}$.
Faire un tableau des variations de g, chercher ses limites en zéro et à l'infini.

4) Donner l'allure de la courbe représentative Cg de g dans le même repère orthonormé que Cf : on donnera les positions respectives des deux courbes pour x strictement positif.
NB : On admettra que pour tout $x > 0$, $e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Algèbre linéaire

1) Soit a un nombre réel, et u, v, w, les vecteurs de R^3
$u = (1,-2,0)$, $v = (1,a,0)$, $w = (0,0,1)$
Pour quelle valeurs de a ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

2) Soit f l'application linéaire de R^3 dans R^3, définie dans la base canonique B de R^3 par
$f(1,0,0) = u$, $f(0,1,0) = v$, $f(0,0,1) = w$
2-a) Donner la matrice (que l'on notera F) de f dans la base canonique B de R^3.

2-b) Suivant les valeurs de a trouvées à la question précédente donner son rang, définir son espace image *Im(f)*, et donner une base de son noyau *Ker(f)* dans la base canonique *B*.

3) On suppose dans cette question que a vaut -3. Soit g l'application linéaire de R^3 dans R^3, définie par $g(u) = (1,0,1)$, $g(v) = (1,1,2)$, $g(w) = (2,1,3)$

Donner la matrice, que l'on notera *G*, de *g* dans la base canonique, ainsi que son rang.

Probabilités

NB : Les résultats seront laissés sous forme d'une expression formelle contenant des puissances, des fractions, des factorielles, des logarithmes ou des exponentielles.

Dans un jeu de loto, l'organisateur du jeu tire au hasard 25 nombres pris entre 1 et 75. On supposera tous les nombres équiprobables.

1) Combien y a t il de combinaisons possibles pour ces 25 nombres ?

2) On s'intéresse au nombre X de fois où le nombre 13 est apparu sur 10 tirages du loto (chaque tirage donnant une liste de 25 nombres, et les tirages étant indépendants).
Donner la loi de X en justifiant votre réponse, son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité d'avoir eu le 13 au moins une fois ?

3) Avant le tirage du loto, les joueurs choisissent chacun une carte comprenant 15 nombres entre 1 et 75. Combien existe-t-il de cartes différentes ?

4) Le tirage a lieu et chaque joueur coche parmi les 25 nombres qui ont été tirés par l'organisateur, ceux qui figurent sur sa carte. Le joueur a gagné si sa carte est complète : tous ses nombres ont été tirés. Quelle est la probabilité *p* de cet événement ?

5) Le joueur décide de garder la même carte jusqu'à ce qu'il gagne.
Quelle est, en fonction de *p*, la probabilité qu'il gagne en 3 tirages au plus ? Quel est, en fonction de *p*, le nombre *n* de tirages à partir duquel cette probabilité dépasse 1/2 ?

PHYSIQUE pages suivantes

PHYSIQUE

Cuisson de pâtes

Pour certaines questions, on demande d'exprimer le résultat sous forme littérale et numérique en fonction des données de l'énoncé. Dans ce cas, on posera le calcul en utilisant les unités fondamentales (m,s…) ou dérivées (N,Pa,J…) du système international (même si les données de l'énoncé sont exprimées dans d'autres unités) mais sans effectuer le calcul. Ainsi à la question 'exprimer sous forme littérale et numérique le temps nécessaire pour qu'un véhicule roulant à v=50 km/h parcoure une distance de L=100 km', il faudrait répondre :

$$t = L/v = \frac{100.10^3 \text{ m}}{(50.10^3 / 3600) \text{ m/s}}$$

Le degré de cuisson des pâtes est lié essentiellement à la gélatinisation de l'amidon qui peut être assimilée de façon très simplifiée à une réaction d'ordre 1.

Amidon natif → Amidon gélatinisé que l'on notera $A_n \rightarrow A_g$

On néglige la chaleur de réaction (ni chaleur dégagée, ni chaleur absorbée). La constante de vitesse de réaction est donnée par l'expression suivante :

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad k_0 = 5\ 10^{11}\ s^{-1},\ E_a=100\ kJ.mol^{-1},\ R=8{,}314\ J\ mol^{-1}\ K^{-1},\ T \text{ en K}$$

Les propriétés de l'eau sont supposées constantes et égales aux valeurs suivantes :
- masse volumique : $\rho_e = 1000$ kg.m^{-3}
- capacité thermique massique : $c_e = 4180$ J kg^{-1}K^{-1}
- conductivité thermique : $\lambda_e = 0{,}599$ W m^{-1}K^{-1}
- masse molaire : $M_e = 18$ g.mol^{-1}
- chaleur latente de vaporisation à 100°C : L_v=2257 kJ.kg^{-1}

Les parties **A**) et **B**) peuvent être traitées indépendamment

A) Cuisson dans l'eau bouillante à différentes pressions

A.1) Rappeler la définition de la vitesse de réaction et son expression en fonction de k et de la concentration d'une des deux espèces d'amidon.

A.2) Exprimer les concentrations d'amidon natif et d'amidon gélatinisé en fonction du temps t, de k et de la concentration initiale en amidon natif $[A_n](0)$.

A.3) Le temps de cuisson est supposé égal au temps nécessaire pour gélatiniser α=95% de l'amidon contenu dans les pâtes. Exprimer sous forme littérale le temps de cuisson t_c en fonction de k et α puis en fonction de k_0, E_a, R, α et T.

A.4) Exprimer sous forme numérique le temps de cuisson dans l'eau bouillante dans une casserole au niveau de la mer où la pression atmosphérique est de p_0 =1,013 10^5 Pa.

A.5) Exprimer sous forme littérale et numérique la masse volumique de l'air ρ_a à la pression p_0=1,013 10^5 Pa et à la température T_0=20°C en considérant l'air comme un gaz parfait ayant une masse molaire moyenne de M_a = 29 g.mol^{-1}.

A.6) Exprimer sous forme littérale et numérique la pression atmosphérique p_1 à une altitude Z=2000 m en supposant que l'air compris entre le niveau de la mer et cette altitude a une masse volumique constante ρ_a= 1,205 kg m^{-3} (g=9,81 m s^{-2})

A.7) Tracer l'allure du diagramme d'état de l'eau. La température d'ébullition en altitude est-elle plus grande ou plus petite qu'au niveau de la mer ? Expliquer pourquoi.

A.8) Le temps de cuisson des pâtes en altitude est-il plus grand ou plus petit qu'au niveau de la mer ? Expliquer pourquoi.

A.9) La pression dans un autocuiseur peut être significativement plus grande que la pression atmosphérique. Expliquer qualitativement pourquoi la cuisson à l'eau de certains aliments peut y être plus rapide que dans une casserole.

B) Cuisson de pâtes dans une casserole au niveau de la mer

Une casserole cylindrique de diamètre intérieur D=20 cm est remplie d'eau initialement à T_0=20°C sur une hauteur de h=10 cm et posée sur une plaque chauffante délivrant une puissance thermique P_{th}=2 kW.

On suppose que
- toute la puissance de la plaque chauffante est directement transmise à l'eau
- l'eau n'échange de la chaleur qu'avec la plaque chauffante
- la masse d'eau reste constante jusqu'à l'ébullition
- l'eau a une température uniforme

B.1) Indiquer au moins trois phénomènes non pris en compte si on adopte les approximations précédentes.

B.2) Exprimer sous forme littérale et numérique le nombre de moles d'eau : n_e . Montrer que la masse d'eau m_e vaut 3,142 kg.

B.3) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps Δt_1 nécessaire pour chauffer l'eau de T_0=20°C à T_1=100°C.

B.4) On rajoute dans l'eau chaude, qui est à 100°C, une masse m_p =500g de pâtes qui sont à la température T_0=20°C. La capacité thermique massique des pâtes vaut c_p = 2000 J $kg^{-1}K^{-1}$. On suppose que l'échange de chaleur entre l'eau et les pâtes est si intense que l'eau et les pâtes atteignent quasi-instantanément une nouvelle température unique. Exprimer sous forme littérale et numérique cette nouvelle température : T_2

B.5) Montrer que la pression au fond de la casserole est relativement peu différente de la pression atmosphérique p_0 =1.013 10^5 Pa. En déduire que la température d'ébullition de l'eau $T_{ébul}$ est partout proche de 100°C .

B.6) Exprimer sous forme littérale le temps Δt_2 nécessaire pour chauffer l'eau et les pâtes de T_2 à $T_{ébul}$.

B.7) Exprimer sous forme littérale et numérique le temps Δt_3 qu'il faudrait pour vaporiser toute l'eau à partir de l'ébullition.

FIN DE L'ÉPREUVE