Concours B ENSA
B – 0210MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

———

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

La plupart des questions peuvent être traitées indépendamment.

1-Analyse

1.1 On considère l'équation différentielle $xy'-y=x$ définie pour $x \in]0;+\infty[$.
Quelle est la solution générale de $xy'-y=x$?
Déterminer la solution particulière h de l'équation $xy'-y=x$ telle que $h(e)=e$.

1.2. Dans cette question x est un nombre positif ou nul.
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln x \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

a. Démontrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
c. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
d. Dessiner C_f. On représentera les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

1.3.
a. Déterminer la position relative de Cf et de la droite d'équation $y=x$ selon les valeurs de x.
b. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, hachurer l'ensemble A des points M (x,y) tels que :

$$\begin{cases} 0<x<e \\ f(x)<y<x \end{cases}$$

c. Calculer l'aire de l'ensemble A.

2-Probabilités

On dispose de deux dés :
- un dé rouge, non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ;
- un dé bleu, également non pipé, comportant deux faces marquées 1, deux faces marquées 2, deux faces marquées 3.

On lance simultanément les deux dés.

On note X et Y les variables aléatoires qui, à chaque lancer des dés, associent respectivement le numéro du dé rouge et celui du dé bleu.

2.1 Donner la loi de X et la loi de Y.

2.2 Donner la loi de probabilité du couple (X,Y).

2.3 Un lancer des deux dés est un succès si le total X+Y vaut 2, 4, ou 6 ; dans le cas contraire il s'agit d'un échec. Donner la probabilité de succès d'un lancer.

2.4 On note Z la variable aléatoire qui, à chaque groupe de 10 lancers, associe le nombre de succès obtenus. Quelle est la loi de probabilité de Z ? Justifier.

2.5 Donner l'espérance et la variance de Z, ainsi que la probabilité d'avoir obtenu au moins deux succès sur un groupe de 10 lancers.

On pourra laisser les résultats sous forme de fractions et de puissances.

3- Algèbre linéaire

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

où a, b, x, y, z sont des réels.

3.1 Pour quelles valeurs de b l'équation matricielle AX = B a-t-elle des solutions ? Donner ces solutions.

3.2 Donner le rang de la matrice A. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles cette matrice est inversible ?

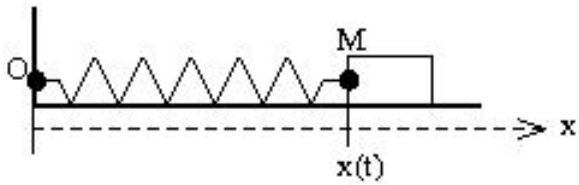
3.3 Pour a = 0, donner les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

PHYSIQUE

Étude d'un oscillateur et de son portrait de phase

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

On s'intéresse dans ce qui suit à l'étude d'un oscillateur formé par une masse m attachée au point M à l'une des extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O, origine d'un axe des x horizontal.



A Oscillateur sans frottement.

Dans un premier temps, on suppose dans cette partie que le mouvement horizontal de l'oscillateur se fait sans frottement et on repère par $x(t) = OM(t)$ la position de la masse au cours du temps.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse.
2. Exprimer la force subie par la masse de la part du ressort.
3. Préciser la position d'équilibre x_{eq} de la masse.

On pose désormais $u(t) = x(t) - x_{eq}$.

4. En écrivant le principe fondamental de la dynamique en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ peut s'écrire $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0{}^2 u = 0$ où on précisera l'expression et l'unité de ω_0 .

On lâche la masse sans vitesse initiale en l'écartant de a par rapport à sa position d'équilibre.

5. Exprimer la solution $u(t)$.

6. Rappeler la définition d'une force conservative et préciser pour chacune des forces si elle est conservative, si elle travaille et le cas échéant l'énergie potentielle dont elle dérive.

7. Rappeler la définition de l'énergie mécanique d'un système et l'exprimer pour le système étudié. Que peut-on dire de l'énergie mécanique dans ce système ?

On pose $w(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{du}{dt}$.

On cherche désormais à tracer le portrait de phase de l'oscillateur c'est à dire à représenter dans un plan d'abscisse u et d'ordonnée w la succession des points $(u(t), w(t))$ occupés par l'oscillateur au cours du temps.

8. Montrer que l'énergie mécanique du système peut s'écrire $E_m = A\,L^2$ où $L^2 = u^2 + w^2$. Quelle est l'interprétation géométrique de L dans le plan de phase.
   À partir de la question précédente en déduire la forme exacte du portrait de phase de l'oscillateur harmonique pour $a > 0$, on prendra soin de préciser clairement et en le justifiant le sens de parcours de ce portrait de phase.

B <u>Prise en compte des frottements fluides</u>

On considère maintenant que la masse subit une légère force de frottement fluide qu'on peut écrire $f = -\alpha v$ où v désigne la composante suivant l'axe Ox de vitesse de la masse.

9. Comment s'exprime maintenant le principe fondamental de la dynamique ? Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0{}^2 u = 0$ où on précisera l'expression et l'unité de σ qu'on appelle le facteur d'amortissement.

Les frottements étant faibles, on admettra qu'on peut écrire $\sigma < 1$. On garde les mêmes conditions initiales que précédemment (on lâche la masse sans vitesse initiale en l'écartant de a par rapport à sa position d'équilibre).

10. Préciser la forme générale de la solution de l'équation différentielle puis l'expression prise par $u(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

11. Exprimer la puissance de la force de frottement fluide et préciser si cette force est conservative. En déduire la nouvelle forme du théorème de l'énergie mécanique.

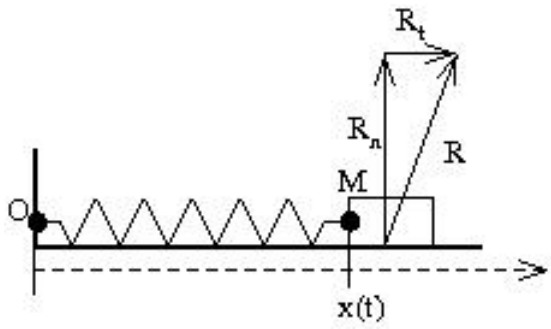
12. Comment évolue l'énergie mécanique au cours du temps ? En déduire qualitativement l'allure du portrait de phase de l'oscillateur lorsque l'on prend en compte les frottements.

C Prise en compte de frottements solides.

Dans toute la suite, on oublie l'existence possible de frottements fluides.

En réalité, la force de frottement subie par l'oscillateur est une force de frottement solide qui obéit aux lois de Coulomb.

La réaction R du support n'est plus normale au support (comme cela serait le cas en l'absence de frottement) et comporte une composante normale R_n et une composante tangentielle R_t. Les lois de Coulomb s'écrivent alors comme suit :
-si l'oscillateur est en mouvement $|R_t| = \beta |R_n|$ avec une force de frottement opposée au mouvement
-l'oscillateur est arrêté si et seulement si $|R_t| < \beta |R_n|$.



On réalise toujours la même expérience à savoir qu'on lâche la masse sans vitesse initiale en u=a. On supposera a>0.

13. Montrer qu'il n'y aura pas mise en mouvement de la masse si $|a| < u_s$ où on exprimera u_s $(u_s > 0)$ en fonction de β, m, g et k.

On suppose dans la suite que $a = 9,5\, u_s$. La masse va donc se mettre en mouvement et on aura une vitesse v négative dans un premier temps.

14. Montrer qu'avec ces hypothèses l'équation vérifiée par $u(t)$ s'écrit
$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0{}^2 u = \omega_0{}^2 u_s$.
En déduire l'expression de $u(t)$.

On pose à nouveau $w(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{du}{dt}$.

15. Montrer que dans cette première phase, on peut écrire $(u - u_s)^2 + w^2 = (a - u_s)^2$. En déduire l'allure du portrait de phase dans la première phase.

La deuxième phase commence lorsque $v(t)$ s'annule et redevient positive. On étudie à présent la deuxième phase du mouvement pour laquelle $v > 0$.

16. Préciser l'abscisse u_1 de la fin de la première phase.

17. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit maintenant $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0{}^2 u = -\omega_0{}^2 u_s$.

18. Par un raisonnement analogue au précédent, en déduire la forme du portrait de phase dans cette deuxième phase.

La deuxième phase prend fin lorsque $v(t)$ s'annule et redevient négative, on se retrouve alors dans une phase identique à la première phase et ainsi de suite.

19. Préciser l'abscisse u_2 de la fin de la deuxième phase.

20. Donner la forme complète du portrait de phase de l'oscillateur et préciser l'abscisse à laquelle il finira par s'arrêter.

Fin de l'épreuve