Concours B ENSA
B – 0209MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

———

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Exercice I – Analyse

Soit f_θ la fonction définie sur $[0;+\infty]$ par : $f_\theta(t) = ke^{-\theta t}$ où k et θ sont des constantes positives.

1. Calculer l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f_\theta(t)\,dt \qquad (1)$$

puis calculer sa limite quand a tend vers $+\infty$. Donner la valeur de k pour que cette limite soit égale à 1. On conserve cette valeur de k dans toute la suite du problème.

2. Calculer l'intégrale :

$$J(a) = \int_0^a t f_\theta(t)\,dt \qquad (2)$$

puis calculer sa limite quand a tend vers $+\infty$.

3. Calculer l'intégrale :

$$K(a) = \int_0^a t^2 f_\theta(t)\,dt \qquad (3)$$

puis calculer sa limite quand a tend vers $+\infty$.

4. Soit C la courbe représentative de la fonction $t \mapsto f_\theta(t)$ dans un repère orthogonal.
Donner l'équation de sa tangente T au point d'abscisse $t = \theta$.
Pour $\theta = 3/5$ tracer C et T

Exercice II – Probabilités

Soit X la durée de vie d'une ampoule au krypton. On suppose que X admet pour densité la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right]$ par : $f_\theta\left(t\right)=\theta e^{-\theta t}$ où θ est une constante positive.

1. Reconnaître la loi de X.

2. Donner l'espérance $E\left(X\right)$ et la variance $V\left(X\right)$ de la variable aléatoire X. On pourra, au choix, donner le résultat ou utiliser les calculs de la première partie.

3. Calculer le réel positif m tel que : $P\left(X\le m\right)=1/2$.

   Comparer m et $E\left(X\right)$. Peut-on conclure que la moitié des ampoules ont une durée de vie supérieure à $E\left(X\right)$?

4. Calculer $P\left(X>E\left(X\right)\right)$. Commenter ce résultat.

Exercice III – Algèbre linéaire

Soit a et b, deux réels. On donne les matrices G, A, X, X', définies par :

$$G=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 5+a & -3\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & b & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & b & 0\end{pmatrix} \qquad X'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & b\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calculer $X'X$, que l'on comparera à G. Pour quelles valeurs de a et b ces deux matrices sont-elles égales ?

2. Pour quelles valeurs de a la matrice G est-elle inversible ?

3. Calculer le rang de la matrice X. En déduire celui de la matrice A.

4. Pour $a=-10$, effectuer une diagonalisation de G. On donnera les valeurs propres de G ainsi que les sous espaces propres associés.

PHYSIQUE

Problèmes d'isolation d'une maison.

On s'intéresse dans ce problème à la modélisation du chauffage d'un logement et son interaction avec une atmosphère extérieure.
Dans une première partie, on va s'intéresser aux pertes par conduction thermique et à la notion de résistance thermique.
Dans une seconde partie, on discutera plus particulièrement l'intérêt du double vitrage par rapport au simple vitrage.
Dans une troisième partie, indépendante des deux précédentes, on s'intéressera enfin au problème de l'isolation d'une pièce chauffée.

Dans tout ce qui suit, on adopte une description unidimensionnelle suivant l'axe des x.
On considère un matériau de conductivité thermique λ de surface S et d'épaisseur e. On note ρ la masse volumique du matériau et c sa capacité calorifique massique.
Ce matériau sépare deux régions où on suppose la température constante, T_1 pour $x<0$ et T_2 pour $x>e$ (**figure 1**).
On appelle $T(x)$ la température qui règne au point d'abscisse x dans le matériau et on note $\vec{j} = j(x)\vec{e_x}$ le vecteur courant thermique. Toute l'étude sera menée en régime stationnaire et on supposera par ailleurs qu'il n'existe aucun terme source volumique.

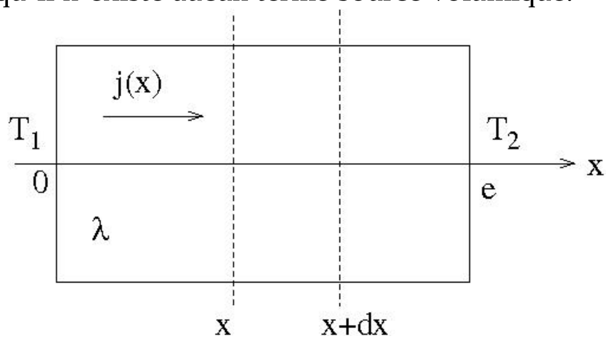

Figure 1 : Géométrie unidimensionnelle.

I. Équation de la chaleur en régime stationnaire. Résistance thermique.

I.1. Quelle est la signification physique de $\vec{j}$ et quelle est son unité ?

I.2. Par un bilan thermodynamique appliqué à la tranche de matériau de surface S comprise entre x et $x+dx$, établir l'équation de conservation de la chaleur portant sur $j(x)$.

I.3. Rappeler la loi de Fourier et l'appliquer dans le cas du problème unidimensionnel. Quelle est l'unité de la conductivité thermique λ ?

I.4. Quelle est alors l'équation vérifiée par la température $T(x)$. Résoudre cette équation et en déduire la forme de $T(x)$ en fonction T_1, T_2, e et x.

I.5. En déduire l'expression de $j(x)$. On suppose $T_1 > T_2$, quel est le signe de j ? Commenter (en quelques lignes maximum) ce signe.

I.6. On note Φ le flux thermique ou puissance thermique Φ qui passe au travers du matériau. Quelle est l'expression de Φ qu'on cherchera à mettre sous la forme : $\Phi = \dfrac{1}{R_{th}}(T_1 - T_2)$.

La quantité R_{th} est appelée résistance thermique, quelle est son unité ? Quelle est sa signification physique ?

I.7. Rappeler la loi d'Ohm locale. En comparant cette loi à la loi de Fourier, on cherche une analogie entre les problèmes électrique et thermique. Quelles sont les grandeurs analogues du courant électrique I et de la tension électrique U ?

II. Comparaison simple vitrage/double vitrage.

On considère pour commencer une vitre de surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$ et d'épaisseur e =10 mm. On donne la conductivité thermique du verre λ_{verre} =1 SI. Cette vitre sépare une pièce à la température T_1=20°C de l'extérieur à la température T_2 =15°C (**figure 2**).

II.1. Calculer la résistance thermique R_1 associée au simple vitrage. Quelle est la puissance Φ_1 qui sort de la pièce au travers de la vitre ?

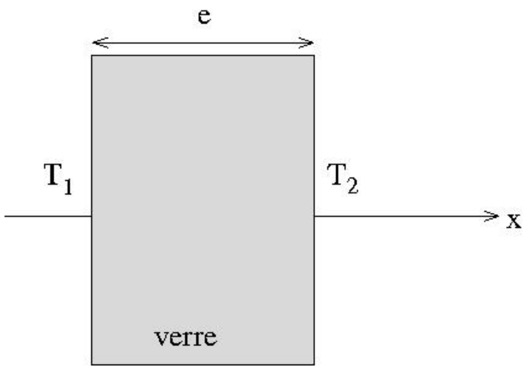

Figure 2 : Simple Vitrage

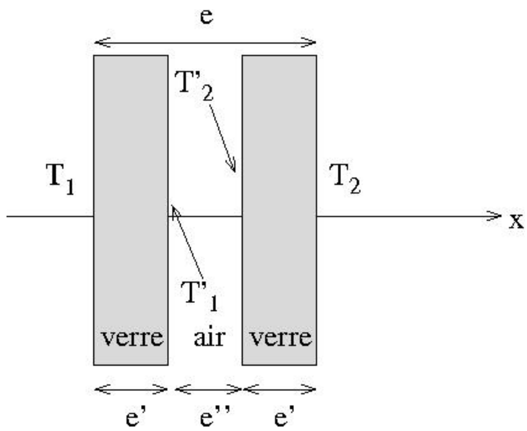

Figure 3 : Double Vitrage

II.2. Cas du double vitrage.

On considère maintenant un double vitrage de surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$ formé par deux lames de verres d'épaisseur e'=4 mm séparées par une couche d'air d'épaisseur e''=2 mm. Ainsi, l'épaisseur totale du système est toujours égale à $e = 2e' + e''$. On donne la conductivité thermique de l'air λ_{air} =0,01 SI (**figure 3**).

On note T'_1 la température qui règne à la sortie de la première lame de verre et T'_2 celle qui règne à l'entrée de la deuxième lame de verre (**figure 3**).

II.2.a. Exprimer et calculer la résistance thermique R d'une seule des lames de verre. De même, exprimer et calculer la résistance thermique R' de l'air.

On note Φ'_1 la puissance thermique qui traverse successivement la première lame de verre, la lame d'air et la seconde lame de verre.

II.2.b. Exprimer les différences de température $T_1 - T'_1, T'_1 - T'_2$ et $T'_2 - T_2$ en fonction de Φ'_1 et des différentes données du problème.

II.2.c. En déduire la différence de température totale $T_1 - T_2$ et l'expression de la résistance thermique totale R'_1 associée au double vitrage. À quel type d'association ce résultat vous fait-il penser ?

II.2.d. Calculer la résistance R'_1 associée au double vitrage ainsi que la puissance Φ'_1 qui sort de la pièce au travers du double vitrage. Que vaut le rapport Φ_1 / Φ'_1 ? Commenter (quelques lignes maximum).

II.3. Prise en compte des effets convectifs.

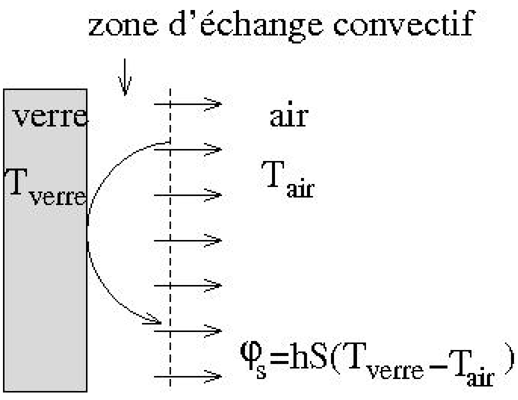

Figure 4

En réalité, le calcul précédent néglige un effet physique très important. En effet, les échanges thermiques entre les vitres et l'air de la pièce ou l'air extérieur se font grâce au mouvement de l'air au voisinage de la surface de la vitre. On parle d'échange convectif (**figure 4**).
On modélise ces échanges convectifs par une loi dite loi de Newton : $\varphi_c = hS(T_{air} - T_{verre})$ où φ_c est la puissance thermique échangée, T_{air} est la température de l'air (de la pièce ou à l'extérieur), T_{verre} est la température dans la vitre au voisinage de l'interface avec l'air, h est appelé coefficient de transfert thermique et S est la surface d'échange.

II.3.a. Montrer que la loi de Newton peut se traduire par l'introduction d'une nouvelle résistance thermique qu'on notera R_c.

On revient pour le moment à l'étude du simple vitrage mais en prenant en compte les échanges convectifs sur les deux faces de la vitre. On note Φ_2 la puissance qui traverse la vitre. Du fait des échanges convectifs, la température sur les deux faces de la vitre est différente de la température de l'air avec lequel elle est en contact (**figure 5**). On donne pour l'interface verre-air $h = 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

II.3.b. En vous inspirant du raisonnement de la question II.2.b., exprimez la résistance thermique R_2 du simple vitrage (avec effet convectif) en fonction de R_1 et R_c. Calculer cette résistance et en déduire la puissance thermique Φ_2 qui traverse le simple vitrage.

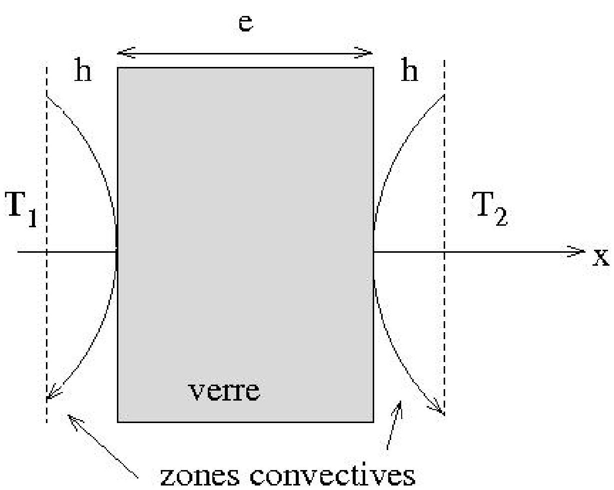

Figure 5 : Simple Vitrage avec convection

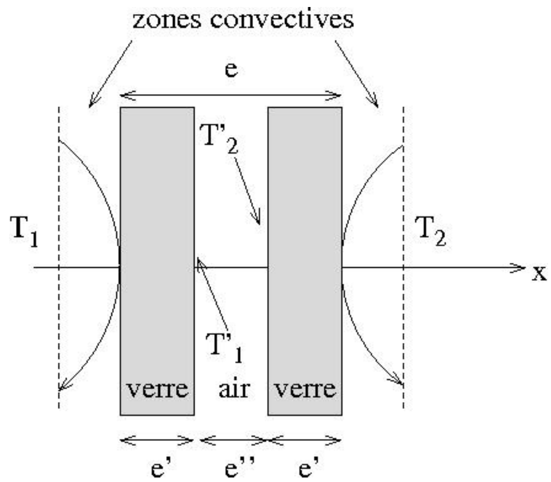

Figure 6 : Double Vitrage avec convection

On s'intéresse maintenant à nouveau au double vitrage en prenant en compte les échanges convectifs. Attention, seules les faces au contact de l'air de la pièce et de l'air extérieur sont le siège d'une convection, la lame d'air centrale étant de faible épaisseur et au repos n'est pas le siège d'un phénomène convectif (**figure 6**).

II.3.c. De même que précédemment, exprimer la résistance thermique R'_2 du double vitrage (avec effet convectif) en fonction de R'_1 et R_c. Calculer cette résistance R'_2 et en déduire la puissance thermique Φ'_2 qui traverse le double vitrage.

II.3.d. Que vaut le rapport Φ_2 / Φ'_2 ? Conclure quant à l'intérêt d'un double vitrage.

III. **Isolation d'une pièce chauffée**

On considère une pièce carrée de côté a =4m et de hauteur H =3m. L'air de cette pièce est considéré comme un gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1,4$. Par ailleurs, les objets présents dans la pièce possèdent également une capacité calorifique $C_{p,obj} = 10^6$ J.K^{-1}.

III.1.a. Exprimer le nombre de moles d'air présentes dans la pièce.

III.1.b. Rappeler l'expression de la capacité calorifique molaire de l'air c_p. Exprimer et calculer alors la capacité calorifique à pression constante $C_{p,air}$ de l'air de la pièce (qu'on supposera à la pression atmosphérique $p_{atm} \simeq 10^5$ Pa).

III.1.c. En déduire, la capacité calorifique totale C du système air+objets présents dans la pièce.

III.2. Évolution temporelle de la température de la pièce.

On note T la température de la pièce qui est supposée être homogène et T_{ext} la température de l'air à l'extérieur. Du fait de la conduction de la chaleur au travers des vitres et des murs de la pièce, une puissance thermique Φ sort de la pièce et la température de la pièce peut donc dépendre du temps. On admettra par ailleurs qu'on peut écrire la loi $\Phi = \dfrac{T - T_{ext}}{R_{tot}}$ où R_{tot} désigne la résistance thermique totale des vitres et des murs.

III.2.a. Par un bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$, montrer que l'équation d'évolution de la température peut se mettre sous la forme :

$$A\frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$$

où on exprimera la constante A en fonction de R_{tot} et C. Préciser l'unité de A.

III.2.b. Résoudre cette équation en considérant qu'à l'instant initial, on a $T(0) = T_0$. On précisera clairement le procédé utilisé pour résoudre cette équation différentielle.

III.2.c. Un expérimentateur a enregistré l'évolution de la température en fonction du temps dans la pièce (**figure 7**). Déduire de ce graphe les valeurs de T_0, T_{ext} et A. En déduire la valeur expérimentale de R_{tot}.

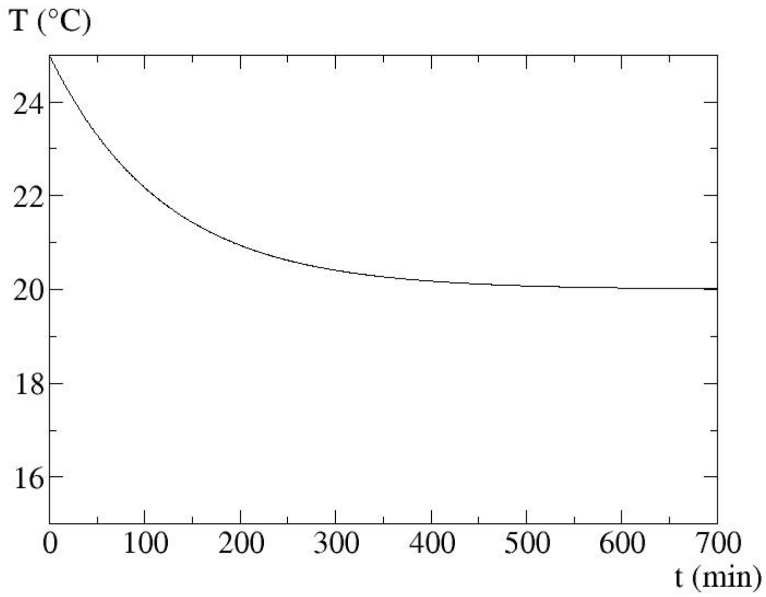

Figure 7

On suppose maintenant qu'un radiateur permet de chauffer la pièce en fournissant à la pièce la puissance P_0.

III.2.d. Par un nouveau bilan d'énergie, déduire la nouvelle équation d'évolution de la température et la mettre sous la forme : $A\frac{dT}{dt}+T=T_\infty$ où on exprimera T_∞ en fonction des données du problèmes.

FIN DE L'ÉPREUVE