Concours B ENSA
B – 0208MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

———

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Exercice I – Algèbre

On donne une matrice A qui dépend du paramètre réel a :

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 2a-3 & a-1 \end{pmatrix}.$$

1.a) Que vaut son déterminant ?
1.b) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?
1.c) Calculer dans ce dernier cas l'inverse A^{-1} de A.

2. On prend $a = 12$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

3. Même question avec $a = 2$.

4. Pour $a = 1$, la matrice A a-t-elle encore des vecteurs propres (réels) ?

Exercice II – Probabilités

Les cyprinidés du bassin du Liechtenstein se composent de 1000 poissons rouges, qui, au cours d'une année, peuvent muter spontanément, indépendamment les uns des autres. La probabilité de mutation d'un poisson au cours de l'année est notée p , avec $p < 10^{-2}$. Pour simplifier, on suppose les poissons immortels.

1.) On note X le nombre total de poissons de ce bassin qui mutent lors d'une année. Quelle est la loi de X ?
2.a) On estime l'espérance de X à 5. En admettant cette valeur, justifier l'utilisation d'une loi de Poisson.
2.b) Quel est son paramètre ?
2.c) En déduire la valeur de la probabilité p .

3.) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un seul mutant cette année ?

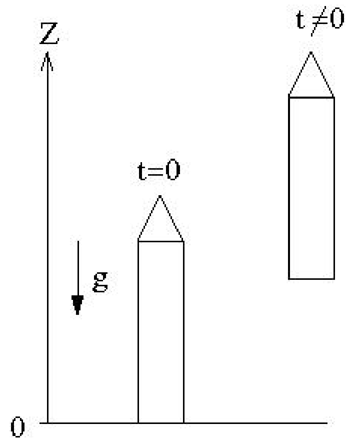
4.) Probabilité d'avoir *au moins* deux mutants ?

PHYSIQUE

Ce problème est constitué de trois parties toutes indépendantes entre elles.

La première s'intéresse au décollage d'une fusée.
Les deux suivantes traitent du problème de la géothermie. On s'intéresse dans un premier temps à l'origine du phénomène de géothermie lié à la radioactivité puis dans un second temps au profil de température à l'intérieur du sol.

A *Étude unidimensionnelle du décollage d'une fusée.*



On étudie une fusée de masse M considérée comme un objet ponctuel de masse constante (on néglige la diminution de masse liée à l'éjection des gaz). On se place dans une étude unidimensionnelle le long de l'axe Oz orienté vers le haut (cf graphe). On supposera l'accélération de la pesanteur g constante avec l'altitude.
On suppose que la fusée est soumise à l'action de son poids, d'une force de poussée $\vec{F} = F\,\vec{e_z}$ qu'on supposera constante et d'une force de frottement de type frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où α est un coefficient de frottement et $\vec{v} = v\,\vec{e_z}$ la vitesse de la fusée.

A.1 Quelle est l'unité de α ?

A.2 Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la fusée.
À l'instant initial, la fusée est au repos sur le sol en $z = 0$.
À quelle condition la fusée peut-elle effectivement décoller ?
On supposera désormais cette condition vérifiée.

A.3 En écrivant le principe fondamental de la dynamique, quelle est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ? La mettre sous la forme :

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = v_\infty$$

Exprimer τ et v_∞. Quelle est l'unité de τ ?

A.4 Quelle est la solution de l'équation différentielle trouvée précédemment ? Comment se comporte la vitesse à l'infini ?

A.5 Rappeler la définition d'une force conservative. Préciser la nature conservative ou non des forces en présence et exprimer s'il y a lieu l'énergie potentielle qui leur est associée.

A.6 Rappeler la définition de la puissance d'une force ainsi que le théorème de l'énergie mécanique. Exprimer l'énergie mécanique de la fusée.

A.7 En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

Étude unidimensionnelle de la géothermie du sol.

Plus l'on fore profond dans la croûte terrestre, plus la température augmente. La plus grande partie de la chaleur de la Terre est produite par la radioactivité naturelle des roches qui constituent la croûte terrestre : c'est l'énergie nucléaire produite par la désintégration de l'uranium, du thorium et du potassium.

B *Étude de la radioactivité géothermique.*

On prendra ici l'exemple de l'uranium.
La radioactivité pour cet élément est due à l'uranium 235. Très peu présent à l'état naturel, il contribue néanmoins au réchauffement de la croûte terrestre et, à ce titre, nous intéresse.

B.1 On rappelle que la matière est constituée d'atomes caractérisés par leur noyau noté ${}_Z^AX$. Pour l'uranium, on a $Z = 92$ et l'uranium possède deux isotopes, l'uranium 235 ${}_{92}^{235}U$ et l'uranium 238 ${}_{92}^{238}U$.

B.1.a Rappeler le nom des nombres Z et A. Quelle est la définition d'un isotope ? Citer un autre élément de votre connaissance possédant deux isotopes (que l'on précisera).

B.1.b Préciser la structure du noyau de chacun des isotopes de l'uranium.

B.1.c Les masses atomiques molaires de ${}_{92}^{235}U$ et ${}_{92}^{238}U$ sont respectivement : 235,0439 g.mol^{-1} et 238,0508 g.mol^{-1}. Sachant que la masse atomique molaire de l'uranium naturel vaut 238,0289 g.mol^{-1}, déterminer la proportion x d'uranium 235 dans l'uranium si on suppose que seuls ces deux isotopes sont présents à l'état naturel.

B.2 Ces deux noyaux sont instables et se désintègrent par radioactivité α en thorium, ${}_{90}^{?}Th$

B.2.a Rappeler la définition de la radioactivité alpha.

B.2.b Écrire la réaction de désintégration pour chacun des isotopes de l'uranium.

B.3 La désintégration α est un processus d'ordre 1 de constante de vitesse λ. Soit n_0 le nombre de noyaux d'un radio-isotope à $t = 0$ et $n(t)$ le nombre de noyaux de cet isotope restant à l'instant t.

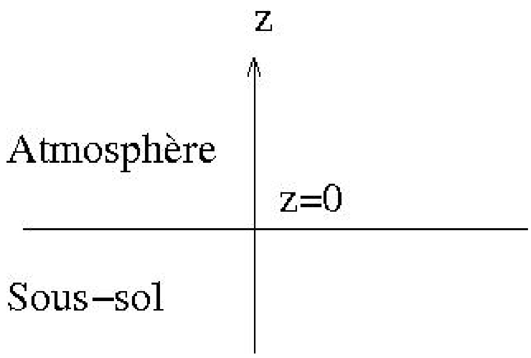
B.3.a Rappeler la définition d'un processus d'ordre 1 et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(t)$. En déduire la loi d'évolution $n(t)$.

B.3.b Rappeler la définition de la demi-vie $T_{1/2}$ d'un élément. Quel est le lien entre λ et $T_{1/2}$?

B.3.c En notant α_0 la proportion d'uranium 235 dans l'ensemble de l'uranium (en supposant que ne sont présents à l'état naturel que les isotopes que ${}_{92}^{235}U$ et ${}_{92}^{238}U$) lors de la formation de la terre, exprimer la proportion actuelle d'uranium 235, notée $\alpha(t)$ en fonction du temps passé depuis la formation de la Terre (noté t) et de la demi-vie de ${}_{92}^{235}U$ et ${}_{92}^{238}U$ qu'on notera respectivement $T_{1/2}^{235}$ et $T_{1/2}^{238}$.

C *Évolution de la température avec la profondeur dans la croûte terrestre.*

On va maintenant chercher à déterminer la température dans la croûte terrestre en utilisant les hypothèses suivantes :



- la croûte terrestre est considérée comme homogène.
- on utilise un modèle unidimensionnel en **régime permanent** (appelé parfois régime stationnaire). La température T du sous-sol ne dépend donc que de la variable z.
- de l'énergie est libérée au sein de la croûte avec une puissance volumique $\tau = 5\times10^{-6}$ W.m^{-3}.
- on notera $\vec{j} = j(z)\overrightarrow{e_z}$ le vecteur courant thermique (encore appelé vecteur densité de flux de chaleur).
- la surface libre du sol est le plan horizontal $z = 0$ et la croûte terrestre correspond à des valeurs de z négatives.
- la capacité thermique volumique du sous-sol notée c est supposée constante et on donne $c = 2,5\times10^{6}$ J.m^{-3}.K^{-1}.

C.1 Rappeler la définition du vecteur courant thermique $\vec{j}$ ainsi que son unité.

C.2 On rappelle qu'on suppose ici que le régime est permanent.
Par un bilan détaillé (où l'on précisera l'origine de chacun des termes de variation considéré) appliqué à une tranche de surface S comprise entre z et $z + dz$, montrer que :
$$\frac{dj}{dz} = \tau$$

C.3 On donne la conductivité thermique du sous-sol $\lambda = 2,6$ S.I.
Rappeler la loi de Fourier ainsi que l'unité de λ.

C.4 En déduire l'équation vérifiée par la température.

C.5 Déterminer la température T(z) en fonction de z, des données du problème, de la température à la surface : $T(0) = T_0 = 285$ K et de la densité de courant d'énergie (encore appelée densité de flux de chaleur) qui se dégage du sol : $j(0) = j_0 = 0,1$ S.I.
Exprimer (sans chercher à l'évaluer numériquement) la profondeur à laquelle il faut forer pour avoir une température de 200°C.

FIN DE L'ÉPREUVE