Topo
III - 1

III. Compacité

La compacité est une propriété <u>topologique</u> (= qui ne dépend que des ouverts).
Elle exprime une notion de "finitude" : les espaces topologiques compacts se comportent, dans certains cas, "un peu comme des ensembles finis".

<u>exemple</u> :

* si $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ est un ensemble <u>fini</u> et $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est une fonction (quelconque) alors f est bornée et elle atteint ses bornes : il existe $a, b \in X$ tels que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \forall x \in X$$

* si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique <u>compact</u> et $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction <u>continue</u>, alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a, b \in X$ tels que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \forall x \in X$$

(1) Définition

<u>recouvrements</u> Soit X un ensemble. Un <u>recouvrement</u> de X est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ $\qquad$ I = ensemble d'indices (souvent infini)

<u>deux exemples extrêmes</u> :

$X = X$ $\qquad$ X se recouvre lui-même (une seule partie dans le recouvrement)

$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ $\qquad$ X est recouvert par ses singletons (en général il y en a bcp...)

<u>abus de langage</u> : "le recouvrement $X = \bigcup_{i \in I} A_i$"

ceci est une égalité d'ensemble, ce n'est pas un recouvrement...
mais c'est pratique d'écrire $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ pour <u>désigner</u> le recouvrement de X par les parties A_i ...

~~Un~~ recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ de X est <u>fini</u> si I est fini

(on recouvre X par un <u>nombre fini</u> de parties de X)

<u>ex</u> : X se recouvre lui-m̂...

<u>sous-recouvrement</u> : Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X.

Un sous-recouvrement du recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement $(B_j)_{j\in J}$ tel que "tout B_j est un A_i" : $\forall j\in J, \exists i\in I ; B_j = A_i$

(!) le plus souvent, on se donne un sous-recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$ en prenant un <u>sous-ensemble d'indices</u> $J \subseteq I$

<u>recouvrements ouverts</u> Maintenant $(X,\mathcal{O})$ est un <u>espace topologique</u>

Un <u>recouvrement ouvert</u> de X est un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ par des parties A_i qui sont toutes des <u>ouverts</u> de X

<u>exemples</u> ① $\mathbb{R}$ usuel $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$

② X <u>discret</u> $X = \bigcup_{x\in X} \{x\}$ les singletons d'un espace discret sont ouverts (!)

③ (X,d) espace métrique

$X = \bigcup_{x\in X} B(x,r)$ où $r>0$ est un rayon (quelconque) fixé

④ (!) tout espace topologique admet un <u>recouvrement ouvert fini</u> :

$X = X$ (!)

<u>compacité</u>

<u>Déf</u> Un espace topologique $(X,\mathcal{O})$ est <u>compact</u> si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini <u>et</u> si la topologie est séparée

(!) spécificité française...

Remarques ① Si on enlève la condition "topologie séparée", on obtient ce que les français appellent "espace topologique <u>quasi-compact</u>". Cette hypothèse de séparation est cruciale pour certains résultats, mais à d'autres moments elle ne joue aucun rôle.

② Dans la suite de ce chapitre, <u>on va supposer que tous les espaces topologiques dont on parle sont séparés</u>, <u>sauf mention contraire</u>.

③ Toute espace métrique est séparé, donc dans ce cas on n'a pas besoin d'ajouter cette hypothèse

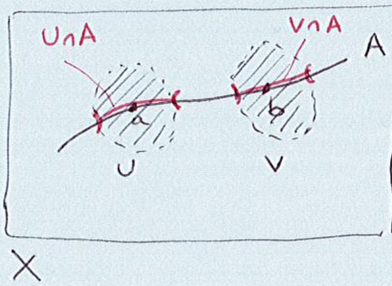
④ On va parler de sous-espaces topologiques et de produits d'espaces topologiques, et il est utile d'observer :

<u>Prop 1</u> Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace top <u>séparé</u> et si $A \subseteq X$, alors A munie de la topologie induite est elle aussi <u>séparée</u>

dém soient $a, b \in A$ <u>distincts</u>

X étant séparé : il existe deux ouverts U, V <u>de X</u> tels que $\begin{cases} a \in U, \ b \in V \\ U \cap V = \phi \end{cases}$

mais alors : $\begin{cases} a \in \underbrace{A \cap U}_{\text{un ouvert de } A}, \quad b \in \underbrace{A \cap V}_{\text{un ouvert de } A} \\ (A \cap U) \cap (A \cap V) = \phi \end{cases}$



donc on a bien séparé a et b <u>dans A</u>

<u>Prop 2</u> Si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont des espaces top <u>séparés</u>, alors $X \times Y$ muni de la topologie produit est lui aussi séparé

dém Soient $(x,y) \in X \times Y$ et $(x',y') \in X \times Y$ deux points distincts.

Donc $x \neq x'$ ou $y \neq y'$ (ou peut être m les deux)

Disons p.ex que $x \neq x'$. Alors, comme X est séparé : il existe U, U' deux ouverts <u>de X</u> tels que $x \in U$, $x' \in U'$ et $U \cap U' = \phi$.

Mais alors $(x,y) \in \underbrace{U \times Y}_{\text{un ouvert de base de } X \times Y}$ et $(x',y') \in \underbrace{U' \times Y}_{\text{idem}}$ et $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = \underbrace{(U \cap U')}_{= \phi} \times Y = \phi$

Donc on a séparé (x,y) et (x',y') dans $X \times Y$.

(!) Prop 1 et Prop 2 justifient (un peu) la condition " à partir de maintenant tous les espaces topologiques sont séparés (sauf mention contraire) "

~~Espace compact~~

(!) (!) (!)

"X est compact" <u>ne veut pas dire</u> :

* que tout recouvrement ouvert de X est fini : en général ceci est <u>faux</u>

  on va voir que certains espaces métriques (p.ex.) sont compacts

  or on a toujours $\underbrace{X = \bigcup_{x \in X} B(x,r)}_{\text{si } X \text{ est infini, on a là un recouvrement ouvert infini de } X}$ $r > 0$ fixé

* qu'il existe un recouvrement ouvert fini de X : ceci est <u>toujours vrai</u>

  puisque $X = X$ (!)

"X est compact" <u>veut dire</u> (en plus de l'hypothèse de séparation) :

quel que soit le recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} U_i$,
on peut trouver un nombre fini de ces ouverts, disons $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_N}$
de sorte que $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$

<u>Exemple</u> $\mathbb{R}$ usuel n'est pas compact p.ex $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$ de ce recouvrement ouvert on ne peut pas extraire de sous-recouvrement <u>fini</u>

<u>Exemple</u> Tout espace topologique <u>fini</u> (et séparé !) est compact :

si X est fini, alors il n'a qu'un nombre fini d'ouverts (X fini $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ fini)

donc tout recouvrement ouvert de X est déjà fini !

<u>Exemple</u> Un espace topologique <u>discret</u> est compact si et seulement si il est fini.

(!) un espace discret est séparé !

dém $\boxed{\Leftarrow}$ on vient de le voir

$\boxed{\Rightarrow}$ $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ est un recouvrement ouvert !

Si X est compact, alors il existe $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que $X = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_N\}$

D'où $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ est <u>fini</u> $\square$

Parties compacts

(!) "être un espace topologique compact" n'est pas une notion relative (c'est une notion "absolue") mais on est souvent dans la situation suivante :

on se place dans un espace topologique "ambiant" X, compact ou pas, et on s'intéresse aux parties A de X qui sont compacts pour la topologie induite

On trouve utile de pouvoir caractériser les compacts de X en restant du point de vue de X, c'est-à-dire à l'aide des ouverts de X

ex : $\mathbb{R}$ n'est pas compact, mais $[0,1]$ est un "compact de $\mathbb{R}$"

Prop Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique (séparé) et soit $A \subseteq X$.
Alors A munie de la topologie induite est compacte si et seulement si :

pour toute famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X telle que $\underbrace{A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i}$,
il existe $J \subseteq I$ avec J fini tel que $A \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$

on dit là aussi que les ouverts V_i $(i \in I)$ recouvrent A...

dém Se donner un recouvrement ouvert de A en tant qu'espace topologique (= pour la topologie induite) c'est se donner une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de A telle que $\boxed{A = \bigcup_{i \in I} U_i}$.

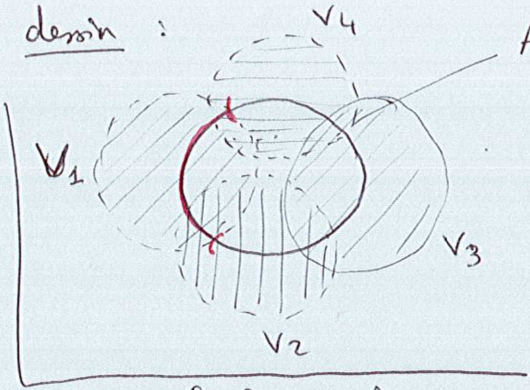
Or on sait que chaque U_i est de la forme $U_i = A \cap V_i$ pour un ouvert V_i de X (pas unique)

Donc $\underbrace{A = \bigcup_{i \in I} (A \cap V_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right)}$

ceci revient à dire que $\boxed{A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i}$

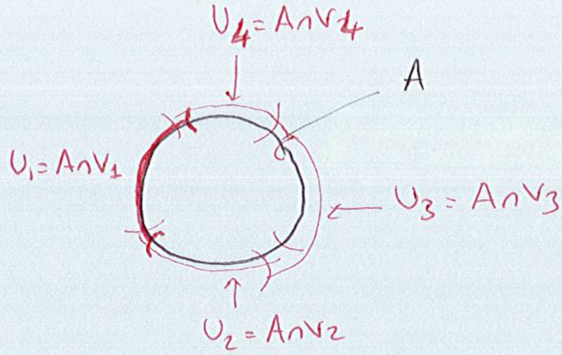
D'où la conclusion. $\square$

dessin :



X = le plan usuel

ici $A \subseteq \underbrace{V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4}_{\text{des ouverts de } \mathbb{R}^2}$



ici $A = \underbrace{U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4}_{\text{des ouverts de } A}$

Exemple Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique (séparé)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $a \in X$

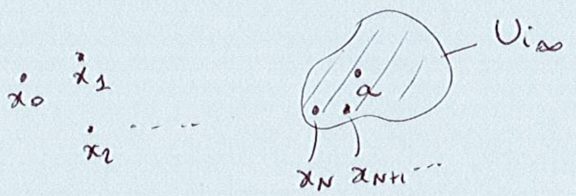
Alors $\{a\} \cup \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est une partie compacte de X

dém : On se donne un recouvrement ouvert de $\{a\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ dans X

c-à-d $\{a\} \cup \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ où U_i ouvert de X $\forall i \in I$

Il existe en particulier un ouvert U_{i_∞} qui contient la limite a $(i_\infty \in I)$

Comme $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$: il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in U_{i_\infty}$



On choisit des ouverts $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{N-1}}$

tels que $x_0 \in U_{i_0}$, $x_1 \in U_{i_1}, \dots, x_{N-1} \in U_{i_{N-1}}$

Alors $\{a\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_{i_\infty}$

Donc $\{a\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

$\boxed{//}$

Théorème . Dans $\mathbb{R}$ usuel, tout intervalle fermé borné $[a,b]$ est compact.

(!) C'est un résultat profond sur les nombres réels. Pour le démontrer, il faut utiliser une propriété fine des réels :

* toute partie non vide majorée possède une borne supérieure

$\boxed{\text{ou}}$

* toute suite bornée admet une sous-suite convergente

$\boxed{\text{ou}}$

* des suites adjacentes convergent, vers la même limite

dém en utilisant l'existence de la borne sup : voir feuille TD3 (exercices supplémentaires)

dém avec les suites adjacentes :

(vert) : il y a des idées importantes qu'il faut connaître
(orange) : il faut penser aux suites adjacentes, avoir l'idée de base, c'est long...

(1) d'abord on le fait pour un recouvrement de $[a,b]$ par des intervalles ouverts

et on raisonne par l'absurde :

on suppose que $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ où A est un ensemble d'indices et chaque I_α est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

et que l'on ne peut pas recouvrir $[a,b]$ par une sous-famille finie de ces intervalles

Dans ce cas, au moins l'un des deux intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ ne peut pas être recouvert par une sous-famille finie.

Notons $[a_1, b_1]$ un tel intervalle (en faisant éventuellement un choix) qui ne peut pas être recouvert par une sous-famille finie de $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$

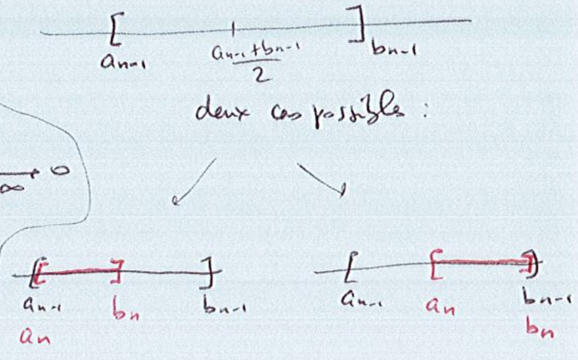
Alors, de m, l'un des deux intervalles $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ et $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ ne peut pas être recouvert par une sous-famille finie de $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$. Notons $[a_2, b_2]$ un tel intervalle.

Etc... On obtient ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$, de sorte que :

(i) la suite (a_n) est croissante

(ii) la suite (b_n) est décroissante

(iii) $\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^n}(b-a)$ et donc $\frac{b_n-a_n}{2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$



(!) les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes

(!) + (iv) $[a_n, b_n]$ ne peut pas être recouvert par une sous-famille finie de $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$

Donc, par propriété de $\mathbb{R}$: il existe un réel ℓ tel que $a_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$ et $b_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$

Evidement, $\ell \in [a,b]$ [on a $a \leq a_n \leq \ell \leq b_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ...]

Donc ℓ appartient à un (au moins) des intervalles de la famille $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$,

disons $\ell \in I_{\alpha_0}$ pour un certain $\alpha_0 \in I$.

Mais comme I_{α_0} est un intervalle <u>ouvert</u> et que $a_n \to \ell$, $b_n \to \ell$, $\ell \in I_{\alpha_0}$:

il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $a_n \in I_{\alpha_0}$ et $b_n \in I_{\alpha_0}$

Et donc $[a_n, b_n] \subseteq I_{\alpha_0}$ pour tout $n \geq N$

Ce qui est une <u>contradiction</u> ! on avait choisi a_n et b_n de sorte que $[a_n, b_n]$ ne puisse pas être recouvert par une sous-famille <u>finie</u> de $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$, ~~or~~ or ici on vient de le recouvrir par <u>un</u> des intervalles I_α ...

fin de la démonstration du ①

② <u>On généralise à un recouvrement par des ouverts quelconques</u>

On suppose que $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ où chaque I_α est un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}$

Mais chaque I_α est une réunion d'intervalles ouverts (déjà vu)

$$I_\alpha = \bigcup_{x \in I_\alpha}]x - r_x, x + r_x[$$ où $r_x > 0$ choisi assez petit pour que $]x - r_x, x + r_x[\subseteq I_\alpha$

D'où un recouvrement de $[a,b]$ par des <u>intervalles ouverts</u>,

dont on peut "extraire" un sous-recouvrement fini :

$$[a,b] \subseteq]x_1 - r_{x_1}, x_1 + r_{x_1}[\cup \ldots \cup]x_N - r_{x_N}, x_N + r_{x_N}[$$

(d'après ①)

Et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini de $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$

(chaque $]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[$ est contenu dans un des I_α)

fin de la dém du ②

fin de la dém du théorème

Compacité en termes de fermés

Prop Un espace topologique (séparé) $(X, \mathcal{O})$ est compact si et seulement si :
pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$,
il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_N} = \emptyset$

" si une intersection quelconque de fermés est vide, alors il en existe une sous-intersection finie vide "

dém par passage aux complémentaires :

F_i est fermé dans $X \iff X - F_i$ est ouvert dans X

$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \iff \bigcup_{i\in I} (X - F_i) = X$

$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_N} = \emptyset \iff (X - F_{i_1}) \cup \dots \cup (X - F_{i_N}) = X$

$\square$

② Compacité dans les espaces métriques. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Compacité séquentielle : toute suite admet une sous-suite convergente

Thm de B-W : pour les espaces métriques, compacité $\iff$ compacité séquentielle

Précompacité

⚠ notion métrique

Déf Un espace métrique (X, d) est précompact si

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \dots, x_N \in X \ ;\ X = B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_N, \varepsilon)}_{\text{pour tout } \varepsilon>0, \text{ on peut recouvrir } X \text{ par un nombre fini de boules de rayon } \varepsilon}$$

Prop Tout espace métrique compact est précompact

dém Soit (X,d) compact.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé

Alors $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ recouvrement ouvert

d'où, par compacité : il existe $x_1, \dots, x_N \in X$ tq $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_N, \varepsilon)$

Donc (X,d) est précompact

▨

⚠ précompact $\not\Rightarrow$ compact

p.ex $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ est précompact **exo!**

mais n'est pas compact (car évidemment pas séquentiellement compact...)

Nombre de Lebesgue d'un recouvrement ouvert

⚠ notion métrique

Prop Soit (X,d) un espace métrique compact

et soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i \in I ; B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$

un tel ε est appelé un nombre de Lebesgue du recouvrement ouvert

"toute boule ouverte de rayon ε est contenue dans au moins un des ouverts du recouvrement"

rem : c'est faux si (X,d) n'est pas compact

p.ex. $X =]0,1[$ usuel (sous-espace de $\mathbb{R}$)

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right[= \underbrace{\left] \frac{1}{3}, 1 \right[}_{n=1} \cup \underbrace{\left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[}_{n=2} \cup \underbrace{\left] \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right[}_{n=3} \cup \dots$$

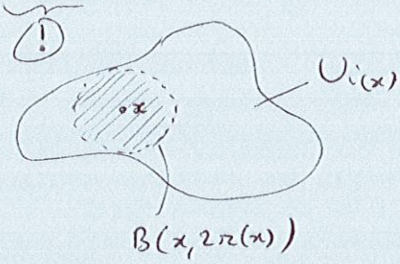
qq soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 1$, $B\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right) = \left]0, \frac{3\varepsilon}{2}\right[$ n'est contenue dans aucun des ouverts du recouvrement...

Topo
III-6

dém On se donne $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ recouvrement ouvert de (X, d) compact

① Pour chaque point $x \in X$, il existe un indice $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$ (car les ouverts U_i recouvrent X).

Il existe alors un rayon $r(x) > 0$ tel que $B(x, \underbrace{2r(x)}_{!}) \subseteq U_{i(x)}$ (car $U_{i(x)}$ est un ouvert...)



② Alors $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \underbrace{r(x)}_{!})$

Donc, par compacité de X : il existe un <u>nombre fini</u> de points $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que

$$X = B(x_1, r(x_1)) \cup \dots \cup B(x_N, r(x_N))$$

③ On affirme que $\varepsilon := \min(r(x_1), \dots, r(x_N))$ est un nombre de Lebesgue du recouvrement. Pour cela :

Soit $x \in X$ quelconque.

Alors il existe un $x_k \in \{x_1, \dots, x_N\}$ tel que $x \in B(x_k, r(x_k))$

Si $y \in B(x, \varepsilon)$ donc si $d(x,y) < \varepsilon$

alors $d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \varepsilon + r(x_k) \underset{\text{déf de } \varepsilon}{\leq} 2r(x_k)$

Donc $y \in B(x_k, 2r(x_k))$

Or $B(x_k, 2r(x_k)) \subseteq U_{i(x_k)}$ cf ①

Ainsi $y \in U_{i(x_k)}$

Donc $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i(x_k)}$

Donc toute boule de rayon ε est bien contenue dans l'un des $U_{i(x_1)}, \dots, U_{i(x_N)}$

$\boxed{\text{cqfd}}$

$\blacksquare$

Thm de B-W : sens $\boxed{\Rightarrow}$

c'est le sens "facile"

On suppose que (X,d) est compact et on se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pts de X.

On veut mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge.

Or on sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

est $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p ; p\geq n\}}$

(!) dans un espace métrique, valeur d'adhérence = limite d'une suite extraite (cf Chapitre 2)

donc il s'agit de montrer que Λ n'est pas vide

Mais ceci est une intersection décroissante de fermés non vides :

(i) chaque $F_n := \overline{\{x_p ; p\geq n\}}$ est un fermé (c'est une adhérence)

(ii) on a $F_{n+1} \subseteq F_n$ car $\{x_p ; p\geq n+1\} \subseteq \{x_p ; p\geq n\}$ et on passe aux adhérences

(iii) chaque F_n est non vide (adhérence d'un ensemble non vide)

Raisonnement par l'absurde :

si $\Lambda = \emptyset$, alors par compacité il existe $N_1, \dots, N_k$ tels que $F_{N_1}\cap\dots\cap F_{N_k} = \emptyset$

mais en posant $N = \max(N_1, \dots, N_k)$ on a $F_{N_1}\cap\dots\cap F_{N_k} = F_N$ puisque la suite des F_n décroît (!)

on obtient donc $F_N = \emptyset$

ce qui est une contradiction

Donc $\Lambda \neq \emptyset$. Donc la suite possède une valeur d'adhérence.

Thm de B-W : sens $\Leftarrow$

Lemme 1 + Lemme 2 + fin de la preuve de $\boxed{\Leftarrow}$

Il s'agit de mq si (X,d) est séquentiellement compact alors il est compact …

Lemme 1 Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact.

Alors tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X admet un nombre de Lebesgue $\varepsilon>0$

c-à-d : $\exists \varepsilon>0 ; \forall x\in X, \exists i\in I, B(x,\varepsilon)\subseteq U_i$

Topo
III – 7

dém (lemme 1) par l'absurde (!) on se donne un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$

et on suppose qu'il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ vérifiant la condition

donc : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X;\ \forall i \in I,\ B(x,\varepsilon) \not\subseteq U_i$

On construit une suite de point de X en appliquant ceci à $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$:

Pour chaque entier $n \geq 1$, on choisit un point $x_n \in X$

tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenue dans aucun des ouverts U_i du recouvrement

D'où une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X.

Par hypothèse, cette suite admet une ~~xxxxxxxxxx~~ sous-suite convergente (compacité séquentielle).

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a \in X$

(!) le point a appartient à un des ouverts du recouvrement, disons U_{i_∞}

C'est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq U_{i_\infty}$

Mais alors, si n est assez grand, on aura à la fois :

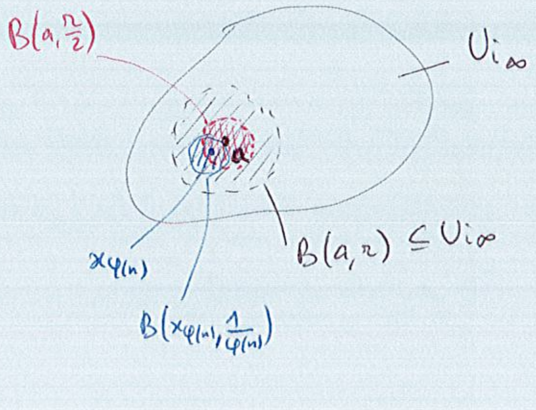
$$\begin{cases} x_{\varphi(n)} \in B(a, \frac{r}{2}) & [\text{car } x_{\varphi(n)} \to a] \\ \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{r}{2} & [\text{car } \varphi(n) \to +\infty] \end{cases}$$

ce qui entraine que $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subseteq B(a,r)$:

$$\left(\text{si } d(y, x_{\varphi(n)}) < \frac{1}{\varphi(n)}, \text{ alors } d(y,a) \leq d(y, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\right.$$

d'où $\underbrace{B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subseteq U_{i_\infty}}$ puisque $B(a,r) \subseteq U_{i_\infty}$

ce qui contredit le choix des x_n → cqfd



Lemme 2 Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

dém par contraposée :

On suppose qu'il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel aucune famille finie de boules ouvertes de rayon ε ne recouvre X.

On montre qu'alors X n'est pas séquentiellement compact :

* soit $x_1 \in X$ un point quelconque
  alors $B(x_1, \varepsilon)$ ne recouvre pas X, donc on peut choisir un $x_2 \in X - B(x_1, \varepsilon)$
* $B(x_1, \varepsilon)$ et $B(x_2, \varepsilon)$ ne recouvrent pas X, donc on peut choisir $x_3 \in X - (B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$
  d'où $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$, $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ et $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$
* etc... on montre (de manière récursive) l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points de X telle que $d(x_n, x_p) \geq \varepsilon$ quels que soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ distincts
  Une telle suite ne possède aucune sous-suite convergente (!)

Donc X n'est pas séquentiellement compact.

$\boxtimes$

fin de la preuve du sens $\Leftarrow$ de B-W :

On suppose X séquentiellement compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement (Lemme 1)

Soit $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_N, \varepsilon)$ un recouvrement de X par un nombre fini de boules de rayon ε (Lemme 2)

Chaque boule $B(x_j, \varepsilon)$ est contenue dans un des ouverts U_{i_j} du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$

$$B(x_1, \varepsilon) \subseteq U_{i_1} , B(x_2, \varepsilon) \subseteq U_{i_2}, \dots, B(x_N, \varepsilon) \subseteq U_{i_N}$$

Alors $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$

On a bien montré que de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Donc X est compact.

$\boxtimes$

(3) Propriétés de la compacité

Prop Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique (séparé). Soit A une partie de X

(i) Si A est compacte, alors A est fermée dans X

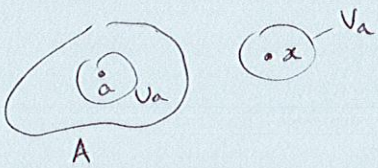
(ii) Si X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte

démonstration verte

dém (i) Soit A partie compacte de X. On va montrer que $X-A$ est ouverte dans X.

Pour cela, soit $x \in X-A$

Pour chaque $a \in A$, on peut disjoindre a de x par des voisinages ouverts (!) (séparation!)



d'où $\left.\begin{array}{l} U_a \text{ voisinage ouvert de } a \\ V_a \text{ voisinage ouvert de } x \end{array}\right)$ avec $U_a \cap V_a = \emptyset$

Alors certainement $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$ ... Donc (compacité de A) on peut ~~Kextu~~ trouver un nombre fini de points $a_1, \dots, a_N \in A$ de sorte que $A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \dots \cup U_{a_N}$

Prenons alors $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_N}$: c'est une intersection finie de voisinages ouverts de x, donc c'est un voisinage de x

De plus ce voisinage est disjoint de U_{a_1}, de $U_{a_2}, \dots$, de U_{a_N}

donc $V \cap (U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_N}) = \emptyset$

donc $V \cap A = \emptyset$ puisque $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_N}$

c-à-d $V \subseteq X-A$.

On vient bien de montrer que $X-A$ est ouvert, donc que A est fermé.

(ii) On suppose X compact et A fermée dans X

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de X : $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ← ouvert de X

Alors, comme A est fermée :

$$X = (X-A) \cup \Big(\bigcup_{i \in I} U_i \Big)$$ ~~est~~ est un recouvrement ouvert de X

Comme X est compact : il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que

$$X = (X-A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$$

mais alors $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$

Donc A est bien compacte

$\boxed{\checkmark}$

(!) dans les espaces <u>métriques</u>, les démonstrations sont un peu plus faciles :

(i) On suppose A compacte

Soit (a_n) une suite de points de A qui converge <u>dans X</u> : $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

a priori c'est un point de X

Compacité séquentielle de A : on peut extraire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge <u>vers un point de A</u>.

Mais toute sous-suite d'une suite convergente est convergente <u>de même limite</u>

Donc $x \in A$

Donc A est fermé (dans X)

(ii) On suppose X compact et A fermé dans X

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A

C'est aussi une suite de points de X...

Donc il en existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un pt $x \in X$

(compacité séquentielle de X)

Or $x_{\varphi(n)} \in A$ $\forall n$... donc $x \in \overline{A}$

Mais A est fermé dans X, donc $x \in A$

Donc la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point de A

Donc A est séquentiellement compact.

$\boxed{\checkmark}$

<u>Prop</u> Soit (X,d) un espace <u>métrique</u>. Alors toute partie compacte ~~de~~ de X est bornée

dém Soit $A \subseteq X$ compacte.

Certainement $A \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,1)$ ...

<u>Par compacité</u> : on peut trouver <u>un nombre fini</u> de points $a_1, \dots, a_N \in A$

tels que $A \subseteq B(a_1, 1) \cup \dots \cup B(a_N, 1)$

Donc A est borné

p. ex $\operatorname{diam}(A) \leq \max_{i,j=1,\dots,N} d(a_i,a_j) + 2 < \infty$

$\boxed{\checkmark}$

Topo
III - 9

<u>Prop</u> le produit de deux espaces compacts est compact

<u>dém</u> (produit de deux espaces <u>métriques</u> compacts)

On montre que le produit de deux espaces métriques compacts est <u>séquentiellement compact</u>

Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $X \times Y$.

Par compacité de X : il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in X$.

Alors $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de Y... donc, par compacité, il en existe une suite extraite $(y_{\underbrace{\varphi(\psi(n))}})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $b \in Y$

(!) extraction d'une extraction :
on extrait (la deuxième fois)
à l'intérieur de la première extraction.

Mais alors $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge encore vers $a \in X$.

Ainsi $\begin{cases} x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \text{ dans } (X, d_X) \\ y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} b \text{ dans } (Y, d_Y) \end{cases}$

Donc $\underbrace{(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})}_{\text{et ceci est bien une suite extraite de } (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b)$ dans $X \times Y$ pour la topologie produit.

$\boxed{\not{4}}$

<u>dém (cas général)</u> voir Feuille TD3 exercices supplémentaires

<u>Généralisation évidente</u> : le produit d'un nombre <u>fini</u> d'espaces compacts est compact

(!) c'est même vrai pour un produit <u>infini</u> d'espaces compacts
(<u>théorème de Tychonoff</u>)

<u>exemple</u> : $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ (!)

Théorème (Heine-Borel) les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (usuel) sont exactement les parties qui sont fermées et bornées pour la distance d_∞ ~~[illegible]~~

dém déjà vu : compact $\Rightarrow$ fermé (!) $\mathbb{R}^n$ est séparé ... (métrisable !)

compact $\Rightarrow$ borné

réciproquement : soit A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

Alors il existe un réel $R > 0$ tel que $A \subseteq [-R, R]^n$ (A bornée)

Mais alors A est fermée dans $[-R, R]^n$ qui est compact

donc A est compacte

$\boxed{//}$

remarque : $A \subseteq [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$

A étant fermé dans $\mathbb{R}^n$, elle est également fermée dans $[-R, R]^n$

* en termes purement topologiques : on sait que les fermés de $[-R, R]^n$ (pour la topologie induite) sont les intersections avec $[-R, R]^n$ des fermés de $\mathbb{R}^n$

or $A = [-R, R]^n \cap A$ et A est fermée dans $\mathbb{R}^n$...

donc A est fermée dans $[-R, R]^n$

* en termes de suites (on est dans des espaces métriques) :

si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge dans $[-R, R]^n$, alors elle converge évidemment dans $\mathbb{R}^n$, et donc sa limite appartient à A (qui est fermée dans $\mathbb{R}^n$).

donc A est fermée dans $[-R, R]^n$

(!) Le résultat (thm de H-B) est faux dans les evn de dimension infinie (feuille TD3 pour un exemple, Chapitre 5 (evn) pour une démonstration générale)

(!) X discret infini : borné, fermé dans lui-même (!), mais pas compact

$]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$: borné, fermé de $\mathbb{Q}$ usuel, mais pas compact

quel est son complémentaire dans $\mathbb{Q}$??

(4) Compacité et continuité

Prop Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces métriques séparés. Soit $f : X \to Y$ continue.
Si A est un compact de X, alors $f(A)$ est un compact de Y

rem il s'agit en fait d'une propriété de la quasi-compacité (compacité sans hypothèse de séparation)

dém. Soit $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ un recouvrement ouvert de $f(A)$
(V_i : des ouverts de Y)

Alors $U_i := f^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X (car f est continue)

et $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ (!) $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \\ \Rightarrow \exists i \in I ;\ f(x) \in V_i \\ \Rightarrow \exists i \in I ;\ x \in f^{-1}(V_i) \end{array} \right.$

Par compacité de A : il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$

d'où A $f(A) \subseteq f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_N})$

(si $y \in f(A)$ ~~tq~~ alors $\exists x \in A ;\ f(x) = y$
d'où un i_k tel que $x \in U_{i_k}$, or $U_{i_k} = f^{-1}(V_{i_k})$,
donc un i_k tel que $f(x) \in V_{i_k}$)

donc $f(A)$ est compact.

□

exo le faire en termes de compacité séquentielle ((X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques)

Théorème Soit X un espace topologique compact, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue.
Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a \in X$ et $b \in X$ tels que

$$\forall x \in X, \quad \underbrace{f(a)}_{\substack{\text{le minimum} \\ \text{de } f \\ \text{(réalisé en } a)}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(b)}_{\substack{\text{le maximum de } f \\ \text{(réalisé en } b)}}$$

dém D'après le résultat précédent : $f(X)$ est un <u>compact</u> de $\mathbb{R}$

Donc $f(X)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$

Donc * $\inf f(X)$ et $\sup f(X)$ sont des <u>nombres</u> (finis)
($f(X)$ est <u>borné</u>)

* et $\inf f(X)$ et $\sup f(X)$ appartiennent à $f(X)$
(puisque $f(X)$ est <u>fermé</u>)

D'où $\exists a, b \in X$; $f(a) = \inf f(X)$, $b = \sup f(X)$

c-à-d $\forall x \in X,\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Prop Soient X et Y des espaces topologiques séparés, homéomorphes ~~et soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme.~~

Alors X est compact si et seulement si Y est compact

(!) la compacité est bien une propriété <u>topologique</u>

dém Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme

Alors X compact $\Rightarrow f(X)$ compact (continuité de f)

Or $f(X) = Y$ puisque f est surjective ... Donc Y est compact.

~~De même : $f^{-1} : Y \to X$ est continue, donc $f^{-1}(Y)$ est compact, mais $f^{-1}(Y) = X$ (f^{-1} est surjective) ... donc X~~

De même Y compact $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ compact (continuité de f^{-1})

Or $f^{-1}(Y) = X$ puisque f^{-1} est surjective ... Donc X est compact.

<u>Théorème de Heine</u> Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces <u>métriques</u>

avec X <u>compact</u>. Alors f est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x, x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(!) La continuité uniforme est une notion <u>métrique</u>.

dém par l'absurde (!) on montre que si f n'est pas uniformément continue, alors elle n'est pas continue.

on suppose f non uniformément continue

Donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe des points $x, x' \in X$ avec $d_X(x,x') < \delta$ et $d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$

en particulier pour $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

on peut trouver des points $x_n, x'_n \in X$ tels que $\begin{cases} d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \\ d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon \end{cases}$

Par compacité de X : il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

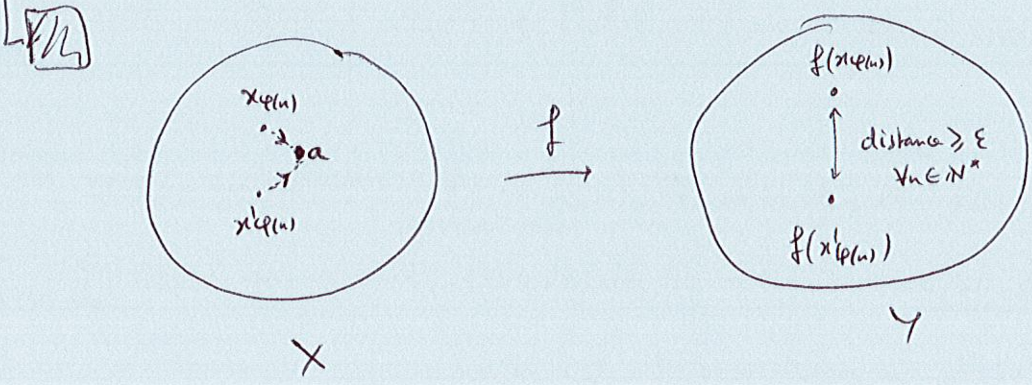
qui converge dans X : $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$ dans X

Alors également $x'_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$. En effet $d(x'_{\varphi(n)}, a) \leq \underbrace{d(x'_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)})}_{\leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}} + \underbrace{d(x_{\varphi(n)}, a)}_{\to 0 \ (n\infty)}$

Mais d'un autre côté $d_Y(f(x_{\varphi(n)}), f(x'_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc au moins une des deux suites $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f(x'_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$

ne converge pas vers $f(a)$. Donc f n'est pas continue en a



Une application de la compacité

Théorème Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

dém Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer qu'elle est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$

① Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ c-à-d $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$N(x) = N(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

$$\leq |x_1|\, N(e_1) + \dots + |x_n|\, N(e_n) \qquad \text{inég } \Delta \text{ pour } N$$

$$\leq \underbrace{\left[N(e_1) + \dots + N(e_n) \right]}_{\text{une constante } \alpha > 0} \|x\|_\infty$$

ainsi $N(x) \leq \alpha \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha > 0$

② Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, considérons la norme N comme une <u>fonction</u> $\mathbb{R}^n \xrightarrow{N} \mathbb{R}$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Alors N est α-lipschitzienne (!)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |N(x) - N(y)| \underset{\substack{\text{2ième inég } \Delta \\ \text{pour la norme } N}}{\leq} N(x-y) \underset{\text{par ①}}{\leq} \alpha \|x-y\|_\infty$$

Donc en particulier N est <u>continue</u>

(!) ce n'est pas une évidence : on dit que $\mathbb{R}^n \xrightarrow{N} \mathbb{R}$ est continue pour la topologie sur $\mathbb{R}^n$ <u>provenant de la norme $\|\cdot\|_\infty$</u>

(ce serait évident si on mettait la topologie provenant de la norme N elle-m...)

Or la sphère unité S de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est <u>fermée</u> et <u>bornée</u> ... donc elle est <u>compacte</u>.

Par conséquent, la restriction $N_{|S} : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto N(x) \end{array}$ est continue, <u>bornée</u> et <u>atteint ses bornes</u>. Or elle est strictement positive sur S (!) car $x \neq 0 \Rightarrow N(x) > 0$

Donc il existe un point $a \in S$ tel que

$$0 < \underbrace{N(a)}_{\text{un nombre } \beta > 0} \leq N(x) \quad \forall x \in S$$

Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$: $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, donc $N\left(\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \beta$

Or $N\left(\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \dfrac{1}{\|x\|_\infty} N(x)$ car N est une norme

d'où $\dfrac{1}{\|x\|_\infty} N(x) \geq \beta$ c-à-d $N(x) \geq \beta \|x\|_\infty$ pour tout x non nul, encore vrai pour $x = 0$...

<u>ccl</u> : il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\beta \|x\|_\infty \leq N(x) \leq \alpha \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

c-à-d N et $\|x\|_\infty$ sont <u>équivalentes</u>