UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)
ANNÉE : 2019-2020

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. On considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } a + c = b + d = 1.$$

(a) Montrer que si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

(b) Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que c'est un vecteur propre de A. On note λ_1 sa valeur propre que l'on déterminera.

(c) Montrer que si v est un vecteur propre non colinéaire à u, sa valeur propre associée est égale à 1.

(d) On note e_1 le premier vecteur de la base canonique. Montrer que dans la base (u, e_1) la matrice de l'endomorphisme associé à A est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Conclure que si $\lambda \neq 1$, la matrice A est diagonalisable.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le spectre de A_3. Est-elle diagonalisable ?

(b) Trigonaliser A_3.

(c) Déterminer le sous-espace caractéristique $E_2^2 = \mathrm{Ker}((A_3 - 2I_3)^2)$.

(d) En déduire une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1} A_3 P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. En vous inspirant de l'exercice précédent, trigonaliser les matrices

$$A_6 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On considère la matrice

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le spectre de A_5. Est-elle diagonalisable ?

(b) Déterminer les sous-espaces caractéristiques $E_1^2 = \mathrm{Ker}((A_3 - I_3)^2)$ et $E_{-1}^2 = \mathrm{Ker}((A_3 + I_3)^2)$.
(c) En déduire une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}A_5P = A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. En vous inspirant des exercices précédents, trigonaliser les matrices

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A_9 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

Exercice 6. (Puissances d'un bloc de Jordan)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice d'entrées $n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Écrire la matrice N pour $n = 2, 3, 4$.
(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer N^k.
(c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\lambda I_n + N)^k = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) \lambda^{k-i} N^i$.
(d) Pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, écrire explicitement la matrice $(\lambda I_n + N)^k$.

Exercice 7. On rappelle que l'équation différentielle $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \lambda f(t)$ et $f(t_0) = x_0$ admet pour unique solution $f(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$. On se propose de résoudre le système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{lcrrr} x'(t) & = & 5x(t) & -3y(t) & +2z(t) \\ y'(t) & = & 6x(t) & -4y(t) & +4z(t) \\ z'(t) & = & 4x(t) & -4y(t) & +5z(t) \end{array} \right. \qquad \text{avec} \qquad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \tag{0.1}$$

On pose $v(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $v'(t) = Av(t)$ pour une matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera.
(b) Trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose $w(t) = P^{-1}v(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que les fonctions $a(t), b(t), c(t)$ satisfont un système d'équations différentielles. Résoudre ce système.
(d) Résoudre le système (0.1).