TD Méthodes de Monte Carlo

HAX918X
Jean-Michel Marin

Exercice 1 Nous souhaitons estimer

$$\theta = \int_0^1 \exp(-x)\sin^2(x)\mathrm{d}x\,.$$

1 Proposer deux méthodes de Monte Carlo.

2 Comparer ces deux stratégies.

3 Déterminer le nombre de simulation nécessaire pour que l'erreur absolue relative correspondant à l'une des deux méthodes soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure ou égale à 99%.

4 Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour θ.

Exercice 2 Nous souhaitons estimer par des méthodes de Monte-Carlo l'intégrale

$$I = \int_2^{+\infty} \exp\left(x - x^2/2\right)\mathrm{d}x$$

1 Proposer un estimateur $\hat{I}_1^N$ de I basé sur le simulation de N variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2 Proposer un estimateur $\hat{I}_2^N$ de I par échantillonnage préférentiel basé sur le simulation de N variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(1,1)$.

3 Comparer les variances de $\hat{I}_1^N$ et $\hat{I}_2^N$.

Exercice 3 On souhaite approcher

$$I_l = \mathbb{P}_{Exp(1)}\left(X \in [l, l+1]\right) .$$

1 Proposer un estimateur $\hat{I}_l^1$ de I_l basé sur une méthode de Monte-Carlo faisant intervenir la loi exponentielle.

2 Proposer un estimateur $\hat{I}_l^2$ de I_l basé sur une méthode de Monte-Carlo faisant intervenir la loi uniforme.

3 Comparer $\hat{I}_l^1$ et $\hat{I}_l^2$ suivant les valeurs de l.

Exercice 4 Soit g une fonction intégrable bornée ($0 \leq g \leq 1$) sur $[0,1]$.

On souhaite calculer $m = \int_0^1 g(x)dx$.

Soient X et Y des variables iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose

$$U = \mathbf{1}_{Y \leq g(X)}, \qquad V = g(X) \quad \text{et} \quad W = \frac{g(X) + g(1-X)}{2} .$$

1 Calculer l'espérance et la variance de U, V et W. Comparer les variances.

2 Proposer trois méthodes de type Monte-Carlo pour calculer m.

3 On suppose dans la suite que g est monotone. Vérifier que $\mathbb{E}(g(X)g(1-X)) \leq m^2$.

4 On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite iid de variables de loi uniforme sur $[0,1]$.
Des estimateurs $A_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} g(X_i)$ et $B_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) + g(1-X_i))$, lequel est le meilleur pour calculer m?

5 Prenons par exemple $g(x) = x^2$. En tenant compte du fait que l'on connaît tout dans ce cas, déterminer le nombre de simulations minimal n (pour les estimateurs A_n et B_n) permettant d'obtenir une précision relative inférieure à 1% avec une probabilité supérieure à 99%.