Année 2019-2020
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Dans un ensemble X muni de la topologie grossière, quelles sont les suites convergentes et quelles sont leurs limites ? Quels sont l'adhérence et l'intérieur d'une partie ? Quelles sont les applications continues à valeurs dans X ? Quelles sont les applications continues définies sur X ?

Exercice 2. ⚠ Dans cet exercice, pour une raison typographique, on note $\operatorname{int} A$ l'intérieur d'une partie A. Soit X un espace métrique (plus généralement topologique). Soient A et B des parties de X.

1. Montrer que $X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)$ et que $X \setminus \operatorname{int} A = \overline{X \setminus A}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).
3. Montrer que $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Montrer que $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 3. Soit X un espace métrique. La **frontière** d'une partie $A \subseteq X$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que tout voisinage de x contient à la fois un point de A et un point qui n'est pas dans A.

1. Déterminer la frontière dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $[0, 1]$, $]0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, par définition, $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. En déduire que $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
3. Montrer que $\operatorname{Fr}(\overline{A}) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$ et que $\operatorname{Fr}(\mathring{A}) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$, et donner un exemple où ces deux inclusions sont strictes.
4. Montrer que $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$, et donner un exemple d'inclusion stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la fonction distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue, lorsqu'on met la topologie produit sur $X \times X$.

Exercice 5. soit (X, d) un espace métrique. Si A est une partie de X et $x \in X$, on définit la **distance** de x à A par :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

1. Montrer que $d(x, A)$ est bien définie. Que vaut $d(x, A)$ lorsque $x \in A$?
2. Déterminer $d(x, A)$ dans les cas suivants : (i) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $x = 0$. (ii) $X = \mathbb{R}^2$ euclidien, $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s+1\}$ et $x = (0,0)$. (iii) $X = \mathbb{R}^2$ avec d_∞, $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s+1\}$ et $x = (0,0)$. (iv) X ensemble avec sa métrique discrète, A partie non vide quelconque et $x \notin A$. (v) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. Montrer que, quels que soient $x, y \in X$:

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \quad \text{et} \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

   En déduire que la fonction « distance à A » est continue sur X.
4. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.
5. L'exercice se poursuit dans les « exercices supplémentaires »...

Exercice 6. On note ℓ^∞ l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels, et pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^∞, on pose $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang n'est pas fermé dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 7. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ converge. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1, on pose $\|x\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur ℓ^1.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 8. L'application f définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ réalise-t-elle un homéomorphisme de $[0, 2\pi[$ sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (muni de la topologie induite) ?

Exercice 9. Soient X et Y deux espaces métriques. On se donne deux fermés F et G de X, et deux applications continues $f : F \to Y$ et $g : G \to Y$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in F \cap G$. Montrer qu'alors on définit une application continue $h : X \to Y$ en posant :

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F \,; \\ g(x) & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Donner un contre-exemple lorsque F et G ne sont plus tous les deux fermés.

Exercices supplémentaires

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, et soit A une partie de X munie de la topologie induite. Montrer qu'une partie de A est fermée dans A si et seulement si c'est l'intersection avec A d'un fermé de X.

Exercice 11. On considère $X = [0,1[\cup\{2\}$ et $Y = [0,1]$, chacun muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ usuel. On définit $f : X \to Y$ par $f(x) = x$ si $x \in [0,1[$ et $f(2) = 1$. Montrer que f est une bijection continue. Est-ce que f est un homéomorphisme ?

Exercice 12. **(lemme d'Urysohn dans les espaces métriques)** Soit X un espace métrique, et soient A et B deux fermés *disjoints* de X. Le lemme d'Urysohn affirme qu'il exise une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ donnée par la formule suivante répond à la question :

$$f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Exercice 13. On souhaite montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{R})$. Pour cela, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible.

1. Montrer que, si λ est un nombre réel non nul suffisamment proche de 0, alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible.
2. En déduire qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
3. Conclure.

Exercice 14.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est contenue dans la boule fermée de même centre et même rayon. Donner un exemple (avec un rayon non nul !) où l'inclusion est stricte.
2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, muni de la distance associée. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte (de rayon non nul) est égale à la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 15. On se place dans $X :=]0,1] \cup \{2\}$ vu comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel. *Dans cet espace* X, les ensembles $]0,1]$, $\{2\}$, $]0,1/2[$, $]0,1/2]$ sont-ils ouverts, fermés ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

Exercice 16. Soit (X, d) un espace métrique discret.

1. Soit (X', d') un autre espace métrique. Quelles sont les applications $f : X \to X'$ qui sont continues ?

2. A quelle condition une fonction $f : \mathbb{R} \to X$ est-elle continue, l'espace $\mathbb{R}$ étant muni de sa métrique usuelle ?

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$

1. Montrer que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$ pour tout $x \in X$.
2. Pour $r > 0$, on pose $V_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert contenant A.
3. Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$. En déduire que tout fermé de X est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et que tout ouvert de X est l'union d'une suite croissante de fermés.

Exercice 18. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

1. Expliquer pourquoi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide. On pose $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Si $a > 0$, montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Montrer que l'ensemble $\{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Montrer que, dans l'espace ℓ^∞ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$:

1. L'ensemble $\mathbf{c}$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞.
2. $\mathbf{c}$ est l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 20. On se place dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance p-adique pour un certain nombre premier p (voir feuille TD1). Montrer que l'adhérence de $\mathbb{Z}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.