II. Les espaces métriques vus comme espaces topologiques

① Topologie sur un ensemble

<u>Déf</u> Soit X un ensemble. Une <u>topologie</u> sur X est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X (appelées les <u>ouverts</u> de la topologie), vérifiant :

(i) $\emptyset$ et X sont des ouverts [autrement dit, $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$ ...]

(ii) si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert

(iii) si $O_1, \dots, O_n$ est une famille <u>finie</u> d'ouverts, alors $O_1 \cap \dots \cap O_n$ est un ouvert

Un <u>espace topologique</u> est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{O}$
$(X, \mathcal{O})$

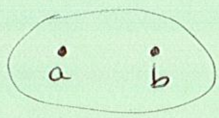
<u>Exemples</u>

(i) on a vu que toute distance d sur X définit une topologie sur X
(et que des distances topologiquement équivalentes définissent la m̂ topologie)
un <u>ouvert</u> de (X,d) = une partie $O \subseteq X$ telle que

$$\forall x \in O, \exists r > 0 ; B(x,r) \subseteq O$$

(ii) la <u>topologie grossière</u> sur X est $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$
c'est la topologie qui possède le moins d'ouverts possibles

(!) si X a au moins ~~3~~ 2 éléments, cette topologie ne provient pas d'une distance puisqu'elle n'est pas séparée



$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a,b\}\}$

$X = \{a,b\}$ p. ex
on ne peut pas "séparer" a de b par des ouverts disjoints, car $X = \{a,b\}$ est le seul ouvert non vide de la topologie ...

② la <u>topologie discrète</u> sur X : c'est $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble de <u>toutes</u> les parties de X

c'est la topologie qui contient le plus d'ouverts possible

⚠ c'est la topologie de la distance discrète sur X : on a vu que toute partie de X est ouverte pour la distance discrète

p.ex $X = \{a, b\}$ $\qquad \mathcal{O} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

③ <u>l'espace de Sierpinski</u> : c'est l'espace topologique

$X = \{a, b\}$ 2 éléments

$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$

c'est une topologie (exo)

elle n'est pas séparée : tout ouvert qui contient b contient aussi a

<u>Déf</u> Une topologie $\mathcal{O}$ sur X est <u>séparée</u> si : quels que soient $a, b \in X$ <u>distincts</u>,

il existe un ouvert U contenant a et un ouvert V contenant b

tels que $U \cap V = \emptyset$

<u>Rem</u> ⚠ Une propriété d'un espace métrique peut être :

- <u>topologique</u>, si elle ne dépend que des ouverts et pas d'une distance précise (convergence des suites, continuité des applications, compacité ...)
- <u>métrique</u>, si elle dépend fondamentalement de la distance choisie (suites de Cauchy, complétude ...)

Toujours essayer de préciser si qq chose est "métrique" ou "topologique"...

Naturellement, cette distinction n'a de sens que dans un espace métrique !

Topologie induite sur une partie

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, soit A une partie de X.

Comment définir une topologie sur A ?

motivation métrique : si (X,d) est un espace métrique, avec une topo $\mathcal{O}_X$ associée,

alors on a vu que toute partie $A \subseteq X$ "hérite" de la distance d

et devient à son tour un espace métrique (A, d_A), donc avec une topo $\mathcal{O}_A$

associée... Quelle relation y a-t-il entre $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_A$, c-à-d entre

les ouverts de X et les ouverts de A ?

Prop (dans ce cadre métrique) Soit $U \subseteq A$.

Alors $U \in \mathcal{O}_A$ si et seulement si $\exists V \in \mathcal{O}_X \,;\, U = A \cap V$

dém (!) on a déjà vu que $\boxed{B_A(a,r) = A \cap B_X(a,r)}$ si $a \in A$ et $r > 0$...

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose que U est un ouvert de A

pour chaque $a \in U$, on peut donc trouver un $r = r_a > 0$

tel que $B_A(a, r_a) \subseteq U$

d'où $U = \bigcup_{a \in U} B_A(a, r_a)$ tout ouvert est réunion de boules ouvertes (déjà vu)

ainsi $U = \bigcup_{a \in U} \big(A \cap B_X(a,r) \big) = A \cap \underbrace{\Big(\bigcup_{a \in A} B_X(a,r) \Big)}_{V}$

V est une réunion de boules ouverts de X,

donc c'est un ouvert de X

et $U = A \cap V$ comme voulu.

$\boxed{\Leftarrow}$ on suppose que $U \subseteq A$ est de la forme $U = A \cap V$ avec V ouvert de X

si $U = \emptyset$, c'est évidemment un ouvert de A...

si U n'est pas vide, et si $a \in U$:

on a $a \in V$ puisque $U = A \cap V$

donc il existe un $r > 0$ tel que $B_X(a,r) \subseteq V$ (V ouvert de X)

d'où $B_A(a,r) = A \cap B_X(a,r) \subseteq A \cap V = U$

il existe bien une boule $B_A(a,r)$ contenue dans U

Donc U est un ouvert de A

Ce qu'on vient de montrer dans le cadre métrique nous motive pour la proposition + définition suivante :

Proposition et Définition Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique. Soit $A \subseteq X$.

Alors la famille $\mathcal{O}_A = \{ A \cap V \; ; \; V \in \mathcal{O}_X \}$ est une topologie sur A, appelée topologie induite (sur A par la topologie $\mathcal{O}_X$ de X).

dém (i) $\emptyset = A \cap \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{O}_A$ (puisque $\emptyset \in \mathcal{O}_X \dots$)

$A = A \cap X$ donc $A \in \mathcal{O}_A$ (puisque $X \in \mathcal{O}_X \dots$)

(ii) si U_i est une famille d'~~ouverts~~ éléments de $\mathcal{O}_A$ $(i \in I)$

chacun peut s'écrire $U_i = A \cap V_i$ avec $V_i \in \mathcal{O}_X$

et alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap V_i) = A \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right)}_{\text{c'est une réunion d'ouverts de } X, \text{ donc c'est un ouvert de } X}$$

donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_A$

(iii) pour une famille finie $U_1, \dots, U_n$ d'éléments de $\mathcal{O}_A$, avec le même genre de notations :

$$U_1 \cap \dots \cap U_n = (A \cap V_1) \cap \dots \cap (A \cap V_n)$$
$$= A \cap \underbrace{(V_1 \cap \dots \cap V_n)}_{\text{une intersection finie d'ouverts de } X, \text{ donc un ouvert de } X}$$

donc $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{O}_A$

$\boxed{/\!/}$

Topologie produit

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques. Comment définir une topologie sur $X \times Y$ (qui ait un rapport avec $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$, bien sûr...) ?

Là aussi, on commence par étudier le cas métrique qui nous sert de motivation.

topo
II - 3

<u>cas métrique</u> (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques

on a défini trois distances d_∞, d_1 et d_2 sur $X \times Y$

et on a vu qu'elles ont les mêmes ouverts (elles sont fortement équivalentes)

on va travailler avec d_∞ (elle est plus pratique ici)

On a donc des topologies $\begin{cases} \mathcal{O}_X & \text{ouverts de } X \text{ (pour } d_X) \\ \mathcal{O}_Y & \text{ouverts de } Y \text{ (pour } d_Y) \\ \mathcal{O}_{X\times Y} & \text{ouverts de } X\times Y \text{ (pour } d_\infty \text{ associée à } d_X \text{ et } d_Y) \end{cases}$

On commence par observer :

$$\boxed{B_{d_\infty}((x,y), r) = B_X(x,r) \times B_Y(y,r)}$$ où $(x,y) \in X\times Y$ et $r > 0$

c'est pour cela que d_∞ est pratique ici...

en effet : $(x', y') \in B_{d_\infty}((x,y), r) \iff d_\infty((x',y'),(x,y)) < r$

$\iff \max(d_X(x',x), d_Y(y',y)) < r$

$\iff d_X(x',x) < r$ <u>et</u> $d_Y(y',y) < r$

$\iff x' \in B_X(x,r)$ <u>et</u> $y' \in B_Y(y,r)$

$\iff (x,x') \in B_X(x,r) \times B_Y(y,r)$

<u>Prop</u> Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. On munit $X\times Y$ de la distance d_∞.

(i) si U est un ouvert de X et V est un ouvert de Y,
alors $U\times V$ est un ouvert de $X\times Y$ (pour d_∞)

(ii) tout ouvert W de $X\times Y$ (pour d_∞) est réunion d'ouverts "de base"
de la forme $U\times V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y.

dém (i) soient U ouvert de X et V ouvert de Y, que l'on peut supposer non vides
(si l'un des deux est vide, alors $U\times V = \emptyset$ et c'est bien un ouvert de $X\times Y$...)

Soit $(x,y) \in U\times V$. Alors $x \in U$, donc il existe $r_x > 0$ tq $B_X(x, r_x) \subseteq U$

et de même $y \in V$, d'où $r_y > 0$ tq $B_Y(y, r_y) \subseteq V$.

En prenant $r := \min(r_x, r_y)$, on a $r > 0$ et $\begin{cases} B_X(x,r) \subseteq U \\ B_Y(y,r) \subseteq V \end{cases}$

d'où $\underbrace{B_X(x,r) \times B_Y(y,r)}_{\text{mais ceci est } B_{d_\infty}((x,y), r)\ (!)} \subseteq U\times V$

donc $U\times V$ est ouvert dans $X\times Y$

(ii) soit W un ouvert de $X \times Y$ (pour d_∞)

pour chaque $(x,y) \in W$, il existe donc un $r = r_{x,y} > 0$

tel que $\underbrace{B_{d_\infty}((x,y), r_{x,y})}_{\text{mais ceci est un "ouvert de base"}} \subseteq W$

puisque c'est $\underbrace{B_X(x, r_{x,y})}_{\text{un ouvert de } X} \times \underbrace{B_Y(y, r_{x,y})}_{\text{un ouvert de } Y}$

Et ainsi $W = \bigcup_{(x,y) \in W} B_X(x, r_{x,y}) \times B_Y(y, r_{x,y})$

W est réunion d'ouverts "de base"

$\boxed{\checkmark}$

Ce qui précède (cas métrique) nous sert de motivation pour la proposition + définition suivante :

<u>Proposition et définition</u> Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques.

Notons $\mathcal{O}_{X \times Y}$ l'ensemble des parties W de $X \times Y$ qui peuvent s'écrire comme réunion (quelconque) d'ensembles de la forme $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$.

Alors $\mathcal{O}_{X \times Y}$ est une topologie sur $X \times Y$, appelée <u>topologie produit</u> associée à $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$.

~~rem~~

(!) <u>rem</u> On dit que la famille $\{U \times V \,;\, U \in \mathcal{O}_X \text{ et } V \in \mathcal{O}_Y)$ est une <u>base</u> de la topologie produit

<u>exemple</u> : la famille des <u>intervalles ouverts</u> est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$

<u>dém</u> (i) $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{O}_{X \times Y}$

$X \times Y = X \times Y$ (!) donc $X \times Y \in \mathcal{O}_{X \times Y}$

(ii) une réunion (quelconque) de réunions (quelconques) d'ensembles de la forme $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$ est <u>évidemment</u> une réunion (quelconque) d'ensembles $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$ ... (!)

(iii) pour les intersections <u>finies</u>, il suffit de savoir le montrer pour l'intersection de <u>deux</u> (puis raisonner par récurrence)

mais si W est réunion de parties de la forme $U_i \times V_i$ [avec $U_i, U'_j \in \mathcal{O}_X$
et si W' est réunion de parties de la forme $U'_j \times V'_j$ et $V_i, V'_j \in \mathcal{O}_Y$]

alors $W \cap W'$

$$= \left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} U'_j \times V'_j\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \underbrace{(U_i \times V_i) \cap (U'_j \times V'_j)}_{\text{mais ceci est } (\underbrace{U_i \cap U'_j}_{\text{un ouvert de } X}) \times (\underbrace{V_i \cap V'_j}_{\text{un ouvert de } Y})}$$

!

donc $W \cap W'$ est bien réunion d'ouverts de base

$\blacksquare$

! dans un produit $X \times Y$

$$\underbrace{(U \times V) \cap (U' \times V')}_{} = (U \cap U') \times (V \cap V')$$

$U, U' \subseteq X$ ouverts ou pas...
$V, V' \subseteq Y$

c'est ensembliste

(x,y) est élt de ceci
ssi $x \in U$ et $y \in V$
<u>et</u> $x \in U'$ et $y \in V'$
c-à-d ssi $x \in U \cap U'$ <u>et</u> $y \in V \cap V'$...

(2) Fermés d'un espace topologique

Se donner une topologie sur X, c'est se donner des <u>ouverts</u> (certaines parties de X)

Or se donner un ouvert revient à se donner son complémentaire...

<u>Déf</u> Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique. Une partie $F \subseteq X$ est <u>fermée</u>
pour la topologie (= est un <u>fermé</u> de la topologie)

si $\underbrace{X - F}_{\text{le complémentaire de } F \text{ dans } X}$ est un ouvert

~~Remarque~~ <u>exemple</u> $[0,1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$ usuel

en effet : $\mathbb{R}-[0,1] =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

réunion de deux ouverts, donc un ouvert

mais $[0,1[$ n'est pas fermé :

$\mathbb{R}-[0,1[=]-\infty,0[\cup [1,+\infty[$) ceci n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$

(!)

<u>Prop</u> les boules fermées d'un espace métrique sont fermées

les sphères ———————

<u>dém</u> Soit (X,d) un espace métrique. Soit $a \in X$, soit $r>0$

On veut montrer que $D(a,r) = \{x \in X ;\ d(x,a) \leq r\}$ est fermé,

autrement dit que son complémentaire est ouvert

Mais si $x \in X - D(a,r)$, c-à-d si $d(x,a) > r$,

alors $\boxed{\text{exo}}$ $B(x,\ d(a,x)-r) \subseteq X - D(a,r)$

donc $X - D(a,r)$ est bien ouvert.

Pour les sphères :

$$X - S(a,r) = \{x \in X ;\ d(a,x) \neq r\}$$

$$= \underbrace{\{x \in X ;\ d(a,x) < r\}}_{\text{boule ouverte}} \cup \underbrace{\{x \in X ;\ d(a,x) > r\}}_{\text{complémentaire de la boule fermée}}$$

$X - S(a,r)$ est donc la réunion de deux ouverts, c'est un ouvert.

(!) Comme pour les ouverts, la notion "être fermé" est <u>relative</u> : on est fermé <u>dans X</u>, un fermé <u>de X</u>

<u>ex</u> : $]0,1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ (!)

mais $]0,1]$ est un fermé de $]0,+\infty[$

Prop (!) L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique vérifie :

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$

(ii) une <u>intersection quelconque</u> de fermés est fermée :

si $F_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \in I$ alors $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

un ensemble quelconque

(iii) une <u>réunion finie</u> de fermés est fermée :

si $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, alors $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$

dém par passage aux complémentaires et utilisation des pptés des ouverts

(i) $X - \emptyset = X$, or X est un ouvert, donc $\emptyset$ est un fermé

$X - X = \emptyset$, or $\emptyset$ est un ouvert, donc X est un fermé

(ii) $X - \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(X - F_i)}_{\text{ouvert}}$

ensembliste

une réunion quelconque d'ouverts est ouverte,
donc $X - \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$ est ouverte,
donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermée

(iii) $X - (F_1 \cup \dots \cup F_n)$

$= \underbrace{(X - F_1)}_{\text{ouvert}} \cap \dots \cap \underbrace{(X - F_n)}_{\text{ouvert}}$

ensembliste

une intersection <u>finie</u> d'ouverts est ouverte,
donc $X - (F_1 \cup \dots \cup F_n)$ est ouverte,
donc $F_1 \cup \dots \cup F_n$ est fermée

$\boxtimes$

(!) dans $\mathbb{R}$ usuel : exemple d'une réunion infinie de fermés qui n'est pas fermée

$$\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{fermé de } \mathbb{R}} = \underbrace{]-1, 1[}_{\text{pas fermé dans } \mathbb{R}}$$

<u>cas particulier important</u> : dans un espace métrique, les "points" sont fermés

c-à-d les singletons $\{x\}$ sont fermés p.ex $\{x\} = D(x, 0) \dots$ une boule fermée

Donc <u>toute partie finie d'un espace métrique</u> <u>est fermée</u> (réunion finie de singletons...)

$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$

(!) espace <u>métrique</u> !
contrex : dans Sierpinski, un des deux points n'est pas fermé

(3) Position d'un point par rapport à une partie.

Soit X un espace topologique

(a) Voisinages d'un point

Déf Soit $x \in X$. Un voisinage de x (dans X) est une partie $A \subseteq X$ qui contient un ouvert contenant x :

$$x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{un ouvert}}}{U} \subseteq A$$

ex dans $\mathbb{R}$ usuel $]-1, 1]$ est un voisinage de 0

car $0 \in \underbrace{]-1, 1[}_{\text{ouvert}} \subseteq]-1, 1]$

rem un "voisinage ouvert" de x (expression utile)

est donc un voisinage de x qui est un ouvert...

autrement dit c'est un ouvert qui contient x

p.ex $]-1,1[$ est un voisinage ouvert de 0 ($\mathbb{R}$ usuel)

notation : $\mathcal{V}_X(x)$ = l'ensemble des voisinages de x (dans X)

⚠ Une partie $A \subseteq X$ est ouverte si et seulement si elle est voisinage de tous ses points.

dem $\boxed{\Rightarrow}$ si A est ouverte, alors évidemment elle est voisinage (ouvert !) de chacun de ses points

$\boxed{\Leftarrow}$ si A est voisinage de tous ses points :

pour chaque $a \in A$, il existe donc un ouvert U_a

tel que $a \in U_a \subseteq A$

Mais alors $\bigcup_{a \in A} U_a = A$ (double inclusion évidente)

donc A est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert

$\boxtimes$

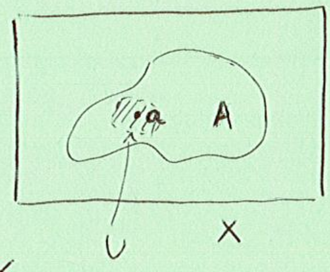
rem dans un espace métrique (X,d) :

! $A \subseteq X$ est voisinage de $x \in X \Leftrightarrow$ il existe $r>0$ tq $B(x,r) \subseteq A$

(b) Intérieur d'une partie

Soit A une partie de X. Elle n'est pas nécessairement ouverte, autrement dit elle n'est pas nécessairement voisinage de tous ses points. Mais il se peut qu'elle soit voisinage de certains points...

Déf Soit $A \subseteq X$. Un point $x \in X$ est intérieur à A (dans X) si A est un voisinage de x, c-à-d s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subseteq A$. L'ensemble des points intérieurs à A (dans X) est appelé l'intérieur de A (dans X), et noté $\mathring{A}$

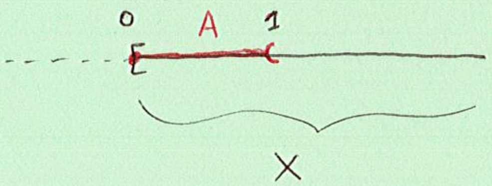


exemple $\mathbb{R}$ usuel $\overset{\circ}{\widehat{[0,1]}} =]0,1[$

$\mathring{\mathbb{Q}}$? $\mathbb{R}-\mathring{\mathbb{Q}}$? $\overset{\circ}{\widehat{]0,1[}}$? $\mathring{\mathbb{R}}$? $\mathring{\emptyset}$?

! il s'agit d'une notion relative : intérieur de A dans X

ex : dans $X=[0,+\infty[$, le point 0 est intérieur à $\underbrace{[0,1[}_{A}$



p.ex $B_X(0,\frac{1}{2}) = [0,\frac{1}{2}[$ est contenue dans A...

!

! Dans un espace métrique :

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r>0 \,;\, B(x,r) \subseteq A \\ \mathring{A} = \{x \in X \,;\, \exists r>0,\ B(x,r) \subseteq A\} \end{array}}$$

$\boxed{\text{attention au quantificateur}}$

Prop ~~déf~~ Dans un espace topologique X :

(i) $\mathring{\emptyset} = \emptyset$ et $\mathring{X} = X$

(ii) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de X contenu dans A

c-à-d $\begin{cases} \mathring{A} \text{ est ouvert, } \mathring{A} \subseteq A \\ \text{si } U \text{ est un ouvert contenu dans } A, \text{ alors } U \subseteq \mathring{A} \end{cases}$

(iii) A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$

(iv) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

dém (i) $\emptyset$ est voisinage de chacun de ses points... puisqu'il n'en a pas

X est évidemment voisinage de tous ses pts...

(ii) $\mathring{A} \subseteq A$ car si $x \in \mathring{A}$ c'est qu'il existe un ouvert U tel que $\underbrace{x \in U \subseteq A}_{\text{donc } x \in A}$

$\mathring{A}$ est un ouvert : si $x \in \mathring{A}$, et si U ouvert tq $x \in U \subseteq A$,

(!) alors tout point de U est intérieur à A :

si $y \in U$, alors $y \in U \subseteq A$... donc $y \in \mathring{A}$

ainsi $U \subseteq \mathring{A}$

et donc $\mathring{A}$ est voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert.

si U ouvert et $U \subseteq A$:

soit $x \in U$ alors $x \in U \subseteq A$ (!) donc $x \in \mathring{A}$

Donc $U \subseteq \mathring{A}$

(iii) si A ouvert, alors c'est le plus grand ouvert contenu dans A (!) donc $A = \mathring{A}$

si $A = \mathring{A}$, alors A est ouvert (comme $\mathring{A}$!)

(iv) exo

(v) exo

$\boxed{\diagup\diagup}$

(c) Adhérence d'une partie

Les ouverts sont les parties qui sont voisinage de tous leurs points...

Les fermés sont les parties qui contiennent tous leurs points adhérents.

Soit X espace topologique [ou plutôt : $(X, \mathcal{O}_X)$ ...]

Soit $A \subseteq X$

Déf Un point $x \in X$ est adhérent à A (dans X) si tout voisinage de x contient au moins un point de A :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap A \neq \emptyset.$$

L'adhérence de A (dans X), notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points qui sont adhérents à A (dans X)

exemple $\mathbb{R}$ usuel $\overline{]0,1[} = [0,1]$

$\overline{\mathbb{Q}} = ?$ $\overline{\emptyset} = ?$

$\overline{[0,1]}$? $\overline{\mathbb{N}}$? $\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$?

(!) notion relative (adhérence dans X)

exo : quelle est l'adhérence de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$?

(!) dans un espace métrique :

$$\boxed{\overline{A} = \{x \in X ;\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}}$$

(!) quantificateur

Prop Dans un espace topologique $(X, \mathcal{O}_X)$

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ et $\overline{X} = X$

(ii) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A

c-à-d $\begin{cases} A \subseteq \overline{A}, \ \overline{A} \text{ fermé} \\ \text{si } F \text{ fermé tq } A \subseteq F, \text{ alors } \overline{A} \subseteq F \end{cases}$

(iii) A est fermée $\iff A = \overline{A}$

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(v) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

dém (i) $\emptyset \cap V \neq \emptyset$ ne peut jamais arriver (si V voisinage de x)

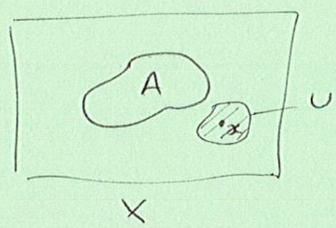
donc $\overline{\emptyset} = \emptyset$

$\overline{X} = X$ évident (pour tout $x \in X$, on a $X \cap X \neq \emptyset$ ...)
↑ un voisinage de x !

(ii) $A \subseteq \overline{A}$ car si $x \in A$,
alors évidemment $a \in A \cap V$ pour tout voisinage de a
(et donc $A \cap V \neq \emptyset$ ...)

$\overline{A}$ est fermé : on montre que $X - \overline{A}$ est ouvert

si $x \in X - \overline{A}$ c-à-d $x \notin \overline{A}$
alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \cap A = \emptyset$
mais alors tous les autres points de U sont dans $X - \overline{A}$:



si $y \in U$, alors $\begin{cases} y \in U \leftarrow \text{un vois. de } y \\ U \cap A = \emptyset \end{cases}$

donc $U \subseteq X - \overline{A}$

ainsi $X - \overline{A}$ est voisinage de tous ses points,
c'est un ouvert (et donc $\overline{A}$ est un fermé).

si $A \subseteq F$ et F fermé : on veut mq $\overline{A} \subseteq F$

or $\overline{A} \subseteq F \iff X - \overline{A} \supseteq X - F$
$\iff \forall x \in X,\ x \notin F \Rightarrow x \notin \overline{A}$

mais si $x \notin F$, comme $X - F$ est un ouvert (F étant supposé fermé !)
c'est qu'il existe un voisinage ouvert U de x qui ne rencontre pas F
(U est entièrement contenu dans $X - F$)
or $A \subseteq F$, donc si $U \cap F = \emptyset$ alors aussi $U \cap A = \emptyset$
donc $x \notin \overline{A}$

c'est ce qu'on voulait montrer

(iii) $\boxed{\Rightarrow}$ si A est fermé, c'est le plus petit fermé qui contient A (!)
donc $A = \overline{A}$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $A = \overline{A}$ alors A est fermé (comme $\overline{A}$ ...)

(iv) exo

(v) exo

∎

(d) Densité

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique

Déf Une partie $A \subseteq X$ est dense dans X si $\overline{A} = X$

⚠ évidemment $\overline{A} \subseteq X$ ... donc $\overline{A} = X$ veut dire :

$$\forall x \in X, \; \forall V \in \mathcal{V}(x), \; V \cap A \neq \emptyset$$

"tout voisinage de tout point de X rencontre A"

dans un espace métrique :

$$\boxed{A \text{ est dense dans } X \iff \forall x \in X, \; \forall r > 0, \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$$

exemples ① $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ usuel

② $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$

rem : $Gl_n(\mathbb{R})$ est d'ailleurs un ouvert dense ...

rem espace topologique séparable = il existe une partie dénombrable dense

ex : $\mathbb{R}$ usuel

$\mathbb{R}^n$ topo produit

④ Convergence des suites

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de pts de X, soit $a \in X$.

Déf On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point a

si $\forall V \in \mathcal{V}_X(a), \; \exists N \in \mathbb{N} ; \; \forall n \geq N, \; x_n \in V$

"la suite rentre définitivement dans tout voisinage de a, si on attend assez longtemps"

⚠ $N = N_V$

⚠ dans un espace topologique non métrique, la convergence peut être "étrange"

(= qq chose dont on n'a pas l'habitude ...)

<u>ex</u> Sierpinski $X = \{a, b\}$

$\mathcal{O}_X = \{ \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$

que dire de la suite constante $(a, a, a \dots)$?

Vers quel(s) point(s) converge-t-elle ?

<u>On va énoncer les résultats pour des espaces métriques, en indiquant ce qu'il en est pour les espaces topologiques généraux.</u>

<u>Prop</u> Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X, supposée convergente de limite $a \in X$. Alors :

(i) la limite a est unique [⚠ propre aux espaces top. <u>séparés</u>]

(ii) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>bornée</u> [⚠ n'a de sens que dans un espace <u>métrique</u>]

(iii) toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, de même limite a

[ok dans un espace top général]

dém (i) si $a \neq b$, il n'est pas possible que $x_n \to a$ <u>et</u> $x_n \to b$:

en effet, il existe $r > 0$ tq $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$

[plus généralement : un voisinage U de a et un voisinage V de b tels que $U \cap V = \emptyset$]

si $x_n \to a$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a,r)$

mais alors $x_n \notin B(b,r)$ $\forall n \geq N$

donc $x_n \not\to b$

(ii) on suppose $x_n \to a$

en particulier, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a,1)$

posons $R = \max(1, d(a,x_0)+1, d(a,x_1)+1, \dots, d(a,x_{N-1})+1)$

alors R est un nombre (fini)

et $x_n \in B(a,R)$ $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Prop Soit (X,d) espace métrique. Soit $A \subseteq X$, soit $x \in X$. (!)

Alors $x \in \overline{A} \iff$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$

dém (i) $\boxed{\Leftarrow}$ on suppose $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ avec $x_n \in A \ \forall n$

soit $r > 0$ quelconque
il existe alors un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x,r) \ \forall n \geq N$
donc $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$

donc $x \in \overline{A}$

(!) cette implicaθ est encore vraie dans un espace topologique

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose $x \in \overline{A}$

(!) pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $A \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$
on choisit un point $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$
on obtient alors une suite de points de A $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
telle que $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
donc telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$, ce qu'on voulait.

(!) ce sens n'est pas vrai dans un espace top général

▨

Corollaire Dans un espace métrique, soit $A \subseteq X$.

Alors A est fermé si et seulement si :

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $\lim_{n\infty} x_n$ existe,
on a $\lim_{n\infty} x_n \in A$

exemple : $A =]0,1)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ usuel

car, p.ex : $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

pts de A

la limite existe dans $\mathbb{R}$, mais elle n'appartient pas à A

exemple $\mathbb{R}$ usuel $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad 0 \in \overline{A}$ car $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{suite de pts de A}} \longrightarrow 0$

dém A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$

donc si et seulement si $x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A$ (puisqu'on a toujours $A \subseteq \bar{A}$)

Or $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x$ est la limite d'une suite de pts de A

Donc A fermé $\Leftrightarrow$ toute limite d'une suite (convergente !) de pts de A appartient elle-m à A

Valeurs d'adhérence d'une suite

~~Déf Une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point $a \in X$ tel qu'il existe une sous-suite des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a~~

Déf Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un <u>espace topologique</u>. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X.

On dit que $a \in X$ est <u>valeur d'adhérence</u> de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage V de a il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n \in V$

"tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite"

Prop Soit (X, d) un <u>espace métrique</u>. Alors $a \in X$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a

dém $\boxed{\Leftarrow}$ on suppose qu'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers a

c-à-d il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante ("extraction")

telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Si V est n'importe quel voisinage de a, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$

tel que $\underbrace{n \geq N \Rightarrow x_{\varphi(n)} \in V}$

on obtient ainsi une infinité de termes de la suite qui sont dans V

(!) vrai dans un espace top général

topo
II-10

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose que a est va de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la boule $B(a, \frac{1}{n})$ contient donc une infinité de termes de la suite

$\underline{n=1}$: on choisit $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(1)} \in B(a, \frac{1}{1})$

! espace métrique ici

$\underline{n=2}$: on choisit $\varphi(2) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(2)} \in B(a, \frac{1}{2})$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $\varphi(2) > \varphi(1)$

etc...

<u>construction par récurrence</u> : on choisit $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} x_{\varphi(n)} \in B(a, \frac{1}{n}) \\ \underline{\underline{\text{et}}}\ \varphi(n) > \varphi(n-1) \end{cases}$

on obtient ainsi une <u>suite extraite</u> $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$

telle que $\underbrace{x_{\varphi(n)} \longrightarrow a}_{\text{puisque } d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1}$

! pas facile de construire un exemple d'espace topologique (non métrique !) dans lequel $\boxed{\Rightarrow}$ est fausse... mais il en existe
(produit infini $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie "boîte" p. ex)

~~<u>exemple</u> $\mathbb{R}$ usuel~~

~~$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$~~

~~alors $0 \in \overline{A}$ car la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0~~
~~une suite de pts de A~~

<u>Prop</u> Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X.
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un <u>fermé</u> de X.

<u>dém</u> On montre que $\{\text{val d'adh. de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p ; p \geq n\}}$
Cela prouve ce qu'on veut, car le terme de droite est une intersection de fermés, donc c'est un fermé.

preuve de l'égalité :

$a \in X$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Leftrightarrow$ tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite

$\Leftrightarrow$ pour tout voisinage V de a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $p \geq n$ tel que $x_p \in V$

$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout voisinage V de a, il existe un $p \geq n$ tel que $x_p \in V$

$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout voisinage de a intersecte $\{x_p \,;\, p \geq n\}$

$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\{x_p \,;\, p\geq n\}}$

$\Leftrightarrow$ $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p \,;\, p \geq n\}}$

$\longrightarrow$ feuille II-10 bis suite d'un produit

(5) Continuité des applications

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application

Déf f est continue en $a \in X$ si :

pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$

(!) on a vu que $f(U) \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$

or dire qu'il existe un ouvert U de X contenant a tel que $U \subseteq f^{-1}(V)$,

c'est précisément dire que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans X.

d'où la reformulation :

f est continue en $a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout ouvert } V \text{ de } Y \text{ contenant } f(a), \\ f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ dans } X \end{cases}$

topo
II-10
bis

Suites d'un produit

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. On considère le produit $X \times Y$ muni de la topologie produit.

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $X \times Y$. Soit $(a,b) \in X \times Y$

Prop $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\infty]{} (a,b)$ dans $X \times Y$ si et seulement si $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \text{ dans } X \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} b \text{ dans } Y \end{cases}$

dém $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\infty]{} (a,b)$ dans $X \times Y$

On montre p. ex. que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ (pareil pour $y_n \to b$...)

Soit U un voisinage ouvert de a (dans X)

Alors $U \times Y$ est un "ouvert de base" de $X \times Y$, contenant (a,b).

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $(x_n, y_n) \in U \times Y$

c-à-d $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N$, $x_n \in U$

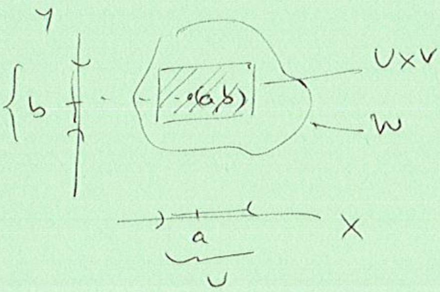
c-à-d $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ dans X

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $x_n \to a$ (ds X) et $y_n \to b$ (ds Y)

Soit W un voisinage ouvert de (a,b) dans $X \times Y$

Alors (propriété de la topo produit) il existe un "ouvert de base" $U \times V$

avec $(a,b) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ouvert} \\ \text{de } X \\ \text{contenant } a}}{U} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ouvert} \\ \text{de } Y \\ \text{contenant } b}}{V} \subseteq W$



Comme $x_n \to a$:

soit $N' \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N'$, $x_n \in U$

Comme $y_n \to b$:

Soit $N'' \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N''$, $x_n \in V$

Soit $N := \max(N', N'')$. Alors $\forall n \geq N$, $x_n \in U$ et $y_n \in V$

donc $\forall n \geq N$, $(x_n, y_n) \in U \times V$

donc $\forall n \geq N$, $(x_n, y_n) \in W$ (puisque $U \times V \subseteq W$)

On a donc trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $(x_n, y_n) \in W$

Donc $(x_n, y_n) \to (a,b)$ dans $X \times Y$

$\boxed{//}$

TSVP →

<u>Rem</u> on peut aussi le montrer lorsque X et Y sont des espaces <u>métriques</u>,

en utilisant sur $X \times Y$ n'importe quelle distance induisant la topologie produit

p. ex d_∞ associée à d_X et d_Y

la démonstration n'est pas vraiment plus facile ...

exo Montrer que

① si $(x_n, y_n) \to (a,b)$ pour d_∞, alors $\begin{cases} x_n \to a \text{ pour } d_X \\ y_n \to b \text{ pour } d_Y \end{cases}$

② si $\begin{cases} x_n \to a \text{ pour } d_X \\ y_n \to b \text{ pour } d_Y \end{cases}$, alors $(x_n, y_n) \to (a,b)$ pour d_∞

[ici (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces <u>métriques</u>
et $d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y'))$ comme d'habitude]

topo
II-11

Caractérisation séquentielle de la continuité

Prop Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques (!), soit $f : X \to Y$ une application

Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si :

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ (dans X),

on a $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$ dans Y

dém $\boxed{\Rightarrow}$ on suppose f continue en $a \in X$ et on se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ (dans X).

vrai dans des espaces top généraux

soit V un ouvert quelconque de Y contenant $f(a)$

alors (par continuité de f en a) il existe un ouvert U de X contenant a, tel que $f(U) \subseteq V$

mais comme $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in U$$

d'où $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ pour tout $n \geq N$

on a donc trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $f(x_n) \in V$

donc $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$ dans Y

$\boxed{\Leftarrow}$ par contraposée : on suppose que f n'est pas continue en a

il existe donc un ouvert V de Y contenant $f(a)$

tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de a dans X

important que X soit métrique

(!) dire que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de a, c'est dire

que aucune boule ouverte centrée en a n'est contenue dans $f^{-1}(V)$

donc pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver un point $x_n \in X$

tel que $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ et $x_n \notin f^{-1}(V)$

car $f(x_n) \notin V$ pour tout $n \geq 1$

d'où une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X

telle que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ dans (X, d_X) et $\underbrace{f(x_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} f(a)}$

Continuité globale

rappel $X \xrightarrow{f} Y$ est continue sur X si (déf) elle est continue en tout point de X

(de m̂ pour " continue sur une partie A de X")

Prop Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espaces topologiques, ~~f~~ $X \xrightarrow{f} Y$ application

Alors f est continue sur X $\Leftrightarrow$ pour tout ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X

$\Leftrightarrow$ pour tout fermé G de Y, $f^{-1}(G)$ est un fermé de X

(!) utile pour montrer que certaines parties sont ouvertes

exemples ① on verra que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$ est continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ usuels)

donc $B(0_{\mathbb{R}^2}, r) = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, r[}_{\text{un ouvert de } \mathbb{R}\ldots})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

cela ne nous apprend pas grand-chose...

de m̂ $D(0_{\mathbb{R}^2}, r) = f^{-1}(]-\infty, r])$ et $S(0_{\mathbb{R}^2}, r) = f^{-1}(\{r\})$

sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ [car $]-\infty, r]$ et $\{r\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$]

② $M_n(\mathbb{R})$ = espace des matrices $n \times n$ $\cong \mathbb{R}^{n^2}$ donc c'est un produit $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n^2 \text{ fois}}$

on verra que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue

p.ex. $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ est donc un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ ...

$GL_n(\mathbb{R})$?

dém <u>première équivalence</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose que f est continue sur X

soit V un ouvert de Y

si $f^{-1}(V) = \emptyset$, alors c'est bien un ouvert de X ...

donc on peut supposer $f^{-1}(V)$ non vide

si $a \in f^{-1}(V)$, c-à-d si $f(a) \in V$,

alors (par continuité de f en a) il existe un ouvert U de X contenant a

tel que $f(U) \subseteq V$ c-à-d $a \in U \subseteq f^{-1}(V)$

donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a

Ainsi $f^{-1}(V)$ est voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert de X.

$\boxed{\Leftarrow}$ on suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte

soit $a \in X$: on veut montrer que f est continue en a

pour cela, soit V un ouvert de Y contenant $f(a)$

par hypothèse : $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X

mais évidemment $a \in f^{-1}(V)$, puisque $f(a) \in V$

et aussi $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ [si $x \in f^{-1}(V)$, c'est que $f(x) \in V$...]

donc il existe un ouvert U de X contenant a, tel que $f(U) \subseteq V$ [à savoir $U := f^{-1}(V)$]

donc f est bien continue en a.

<u>deuxième équivalence</u> : par passage aux complémentaires

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte

soit G un <u>fermé</u> de Y

alors $Y - G$ est un <u>ouvert</u> de X, donc par hypothèse $f^{-1}(Y-G)$ est un ouvert de X

or (!) $f^{-1}(Y-G) = X - f^{-1}(G)$

[c'est purement ensembliste :
$x \in f^{-1}(Y-G) \Leftrightarrow f(x) \in Y-G$
$\Leftrightarrow f(x) \notin G \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(G)$
$\Leftrightarrow x \in X - f^{-1}(G)$]

donc $X - f^{-1}(G)$ est un <u>ouvert</u> de X

autrement dit $f^{-1}(G)$ est un <u>fermé</u> de X

$\boxed{\text{cqfd}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ pareil

Homéomorphismes

Déf Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques

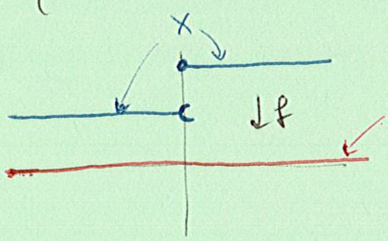
Une application $X \xrightarrow{f} Y$ est un <u>homéomorphisme</u> (de X sur Y)

si $\begin{cases} \text{(i) } f \text{ est bijective} \\ \text{(ii) } f \text{ et } f^{-1} \text{ sont continues} \end{cases}$

On dit que X et Y sont <u>homéomorphes</u> s'il existe un homéomorphisme de X sur Y

<u>Attention</u> : il se peut que f soit bijective et continue mais que f^{-1} ne soit pas continue

p.ex (à l'intérieur de $\mathbb{R}^2$ usuel)



$f : X \to Y$ est la projection verticale

f est bijective, continue

mais f^{-1} n'est pas continue

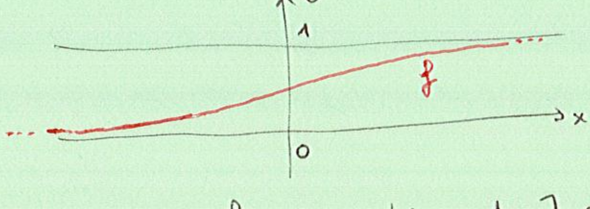
(X et Y sont munis de la topo induite comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ usuel)

Deux espaces topologiques sont homéomorphes = ils sont "les mêmes" du point de vue de la topologie

<u>exemples</u> : ① $]-\infty, +\infty[\;\cong\;]0,1[\;\cong$ n'importe quel intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (non vide !)

$\mathbb{R}$ usuel

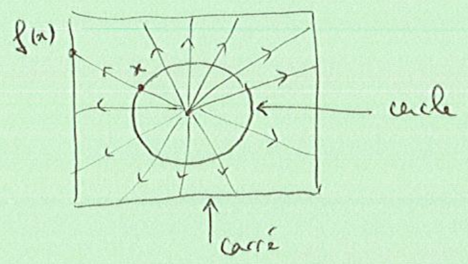
n'importe quelle fonction continue strictement croissante



donne un homéomorphisme de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0,1[$

(2) à l'intérieur de $\mathbb{R}^2$ usuel :

un carré $\cong$ un cercle



on "pousse" le ~~carré~~ cercle sur le ~~cercle~~ carré
(et on "tire" le carré sur le cercle)
le long des rayons

cela donne clairement une bijection bicontinue

(3) toujours dans $\mathbb{R}^2$ usuel

A B C D E F ... parmi ces symboles, lesquels sont homéomorphes entre eux ?

(4) $[0,1]$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes ... pourquoi ?

de m̂ $]0,1[$ et $[0,1[$,
$]0,1[$ et $[0,1]$ ...

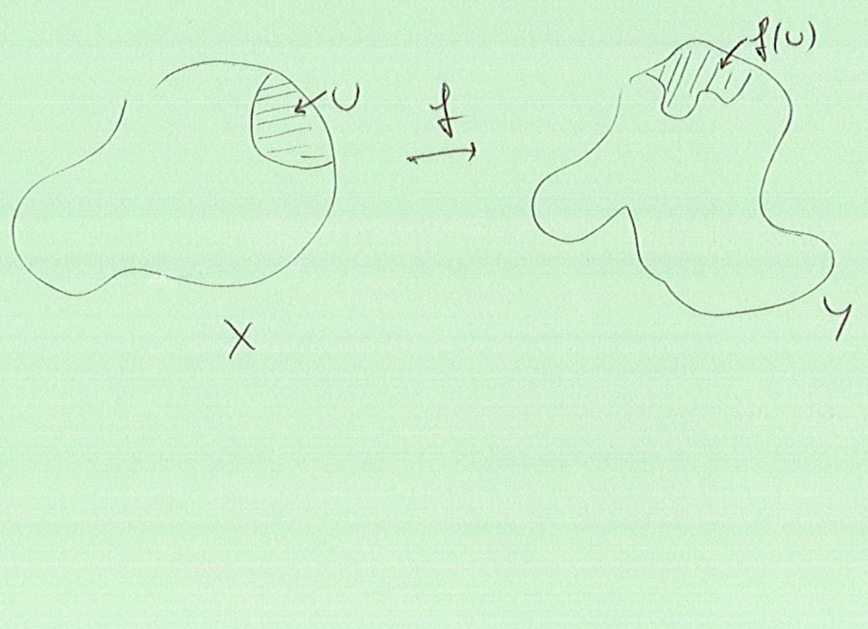
(!) si $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un homéo,

alors f réalise une bijection entre les points de X et ceux de Y

mais aussi entre les ouverts de X et ceux de Y :

si $A \subseteq X$, alors A est ouvert dans $X \iff f(A)$ est ouvert dans Y

si $B \subseteq Y$, alors B est ouvert dans $Y \iff f^{-1}(B)$ est ouvert dans X



Dans les espaces métriques

Lorsque X et Y sont munis d'une distance, il y a des moyens simples de vérifier que certaines (pas toutes...) applications sont continues.

Déf Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application

(i) On dit que f <u>préserve les distances</u> si

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

On dit que f est une <u>isométrie</u> si c'est une bijection et qu'elle préserve les distances

(ii) On dit que f est <u>k-lipschitzienne</u> (pour un certain réel $k \geq 0$) si

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq k\, d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

et que f est <u>lipschitzienne</u> si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$

(!) f préserve les distances $\Rightarrow$ f est 1-lipschitz.

Prop Toute application ~~[illegible]~~ lipschitzienne est continue

dém par ex. par la continuité séquentielle

Si $x_n \to a$ dans X, alors $d_X(x_n, a) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Or $d_Y(f(x_n), f(a)) \leq k\, d_X(x_n, a)$ avec $k \geq 0$

Donc (thm des gendarmes) $d_Y(f(x_n), f(a)) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

c-à-d $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$ dans Y.

exemple soit $a \in X$ un point fixé (X, d) espace métrique

La fonction "distance à a" $\quad d_a : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d_a(x) := d(a, x)$

est continue car elle est 1-lipschitzienne :

$$|d_a(x) - d_a(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deuxième inég } \Delta}}{\leq} d(x,y)$$

(!) toute application continue n'est pas lipschitzienne en général

p.ex $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est continue mais pas lipschitzienne $\boxed{\text{exo : pourquoi ?}}$

Construction de fonctions continues

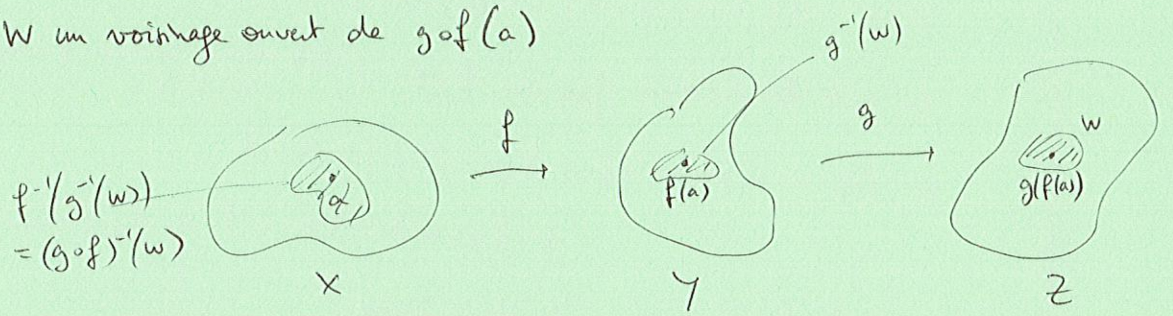
Prop Soient X, Y, Z des espaces topologiques [ou plutôt : $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z) \dots$]

Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ des applications.

(i) Si f est continue en $a \in X$ et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a

(ii) Si f et g sont continues (sur X et Y respectivement) alors $g \circ f$ est continue sur X

dém (i) Soit W un voisinage ouvert de $g \circ f(a)$



Alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage ouvert de $f(a)$, par continuité de g en $f(a)$

puis $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage ouvert de a, par continuité de f en a

Mais $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$
↑
purement ensembliste

Donc $(g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de ~~a~~ a.

Donc $g \circ f$ est continue en a

(ii) pareil ! W ouvert de $Z \Rightarrow g^{-1}(W)$ ouvert de Y

$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(W))}_{(g \circ f)^{-1}(W)}$ ouvert de X

rem : si les espaces X, Y, Z sont métriques, on peut aussi le voir de manière séquentielle

si $\underbrace{x_n \to a}_{\text{dans } (X, d_X)}$ alors $\underbrace{f(x_n) \to f(a)}_{\text{dans } (Y, d_Y)}$ puis $\underbrace{g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(a))}_{\text{dans } (Z, d_Z)}$

(alors : car f C^0 ; puis : car g C^0)

Prop Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique et (E, N) un espace vectoriel normé (réel)

(i) Si $f, g : X \to E$ sont continues (au point $a \in X$, sur X tout entier)

alors $f + g : X \to E$ est continue (en a, sur X)

(ii) Si $f : X \to E$ est continue (en a, sur X) et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $\lambda f : X \to E$ est continue (en a, sur X)

dém : cela résulte de la continuité des opérations dans un evn

(et de la stabilité de la continuité par composition, voir prop. précédente)

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}}_{} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \lambda u \end{array} \quad \text{sont continues}$$

p.ex $d(u+v, u'+v') = \|(u+v) - (u'+v')\|$

on met la distance d_1 sur $E \times E$ (elle donne la topo produit sur $E \times E$)

or $\|(u+v) - (u'+v')\| = \|(u-u') + (v-v')\|$

$$\leq \|u-u'\| + \|v-v'\| = d_1\big((u,v),(u',v')\big)$$

(!)

ainsi la fonction "somme de deux vecteurs"

est 1-lipschitzienne (en choisissant d_1 au départ, sur $E \times E$)

donc elle est continue.

De m. pour $u \mapsto \lambda u$

☑

Prop Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont continues (en $a \in X$, sur X)

alors $fg : X \to \mathbb{R}$ est continue (en a, sur X) (X espace top)

(+)

dém dans le cadre des espaces métriques, en utilisant la continuité séquentielle :

si $x_n \to a$ dans (X, d_X)

alors $f(x_n) \to f(a)$ et $g(x_n) \to g(a)$ dans $\mathbb{R}$

donc $\underbrace{f(x_n)\, g(x_n)}_{\text{c'est } (fg)(x_n)} \to f(a)\, g(a)$ dans $\mathbb{R}$

☑

(+) $U = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ image réc. d'un ouvert

et si $x_n \to a$ dans U

alors $f(x_n) \to f(a)$ dans $\mathbb{R}$

et l'ensemble

$U = \{x \in X ; f(x) \neq 0\}$ est un

ouvert de X, et

$\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ est continue

topo
II-15

Prop $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espaces topologiques

les projections $X\times Y \xrightarrow{p_1} X$ et $X\times Y \xrightarrow{p_2} Y$ sont continues

$(x,y) \longmapsto x$ $\qquad$ $(x,y) \longmapsto y$

dém p.ex pour p_1 : soit U un ouvert de X

alors $p_1^{-1}(U) = U\times Y$ c'est un "ouvert de base" de $X\times Y$ (donc c'est un ouvert)

donc p_1 est continue

de m avec p_2

Prop $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(Z, \mathcal{O}_Z)$ espaces topologiques

Soit $f : X \to Y\times Z$ une application $\quad$ (!) on munit $Y\times Z$ de la topologie produit

$f = (f_1, f_2)$

Alors f est continue $\Longleftrightarrow$ $f_1 : X \to Z$ et $f_2 : Y \to Z$ sont continues

dém dans le cadre des <u>espaces métriques</u>, avec la continuité séquentielle

($\Rightarrow$) $f_1 = p_1\circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ donc il s'agit de composées de fonctions continues

($\Leftarrow$) on suppose f_1 et f_2 continues

si $x_n \to a$ dans X

alors $\underbrace{f_1(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f_1(a)}_{\text{dans } Y}$ et $\underbrace{f_2(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f_2(a)}_{\text{dans } Z}$ $\quad$ par continuité de f_1 et f_2

donc (on l'a déjà vu)

$(f_1(x_n), f_2(x_n)) \xrightarrow[n\infty]{} (f_1(a), f_2(a))$ dans $X\times Y$ avec la topo produit

donc $(f_1, f_2) = f$ est continue

__Exemple__ $X = M_n(\mathbb{R})$ c'est essentiellement $\mathbb{R}^{n^2}$

on le munit de la distance d_∞

* une suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers A dans $(M_n(\mathbb{R}), d_\infty)$

si et seulement si $a_{ij}^{(k)} \xrightarrow[k\infty]{} a_{ij}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$ $\qquad A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n}$

par exemple : $\underbrace{A - \frac{1}{k} I_n = \begin{pmatrix} a_{11}-1/k & & a_{ij} \\ & a_{22}-1/k & \\ & & \ddots \\ a_{ij} & & a_{nn}-1/k \end{pmatrix} \xrightarrow[k\infty]{} A}$

ceci prouve que $GL_n(\mathbb{R})$ est __dense__ dans $M_n(\mathbb{R})$! $\boxed{\text{exo}}$

* les opérations matricielles $A,B \rightsquigarrow A+B$ et $A,B \rightsquigarrow AB$ sont continues

* le déterminant, la trace ... sont continues

$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\qquad Tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

la transposée est continue :

$A \longmapsto {}^tA$

* donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un __ouvert__ de $M_n(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{exo}}$

et l'inversion $GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est __continue__

$A \longmapsto A^{-1}$

on a une formule :

$A^{-1} = \frac{1}{\det} {}^t\mathrm{com}\, A$

* l'ensemble des matrices __symétriques__ est ouvert ? fermé ? $\boxed{\text{exo}}$

$SL_n(\mathbb{R})$ ouvert ? fermé ? $\boxed{\text{exo}}$

$O(n)$ ouvert ? fermé ? $\boxed{\text{exo}}$

__Utilisation de la densité__

① $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors ~~χ_{AB}~~ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ polynôme caractéristique

(!) c'est vrai si A est __inversible__ car alors AB et BA sont semblables : $AB = A(BA)A^{-1}$

(et des matrices semblables ont m̂ polycar)

(!) puis par __densité__ de GL_n dans M_n et __continuité__ du déterminant

si $A_k \xrightarrow[k\infty]{} A$ alors $\chi_{A_kB}(X) = \det(\underbrace{XI_n - A_kB}_{\downarrow k\infty \; XI_n - AB}) \xrightarrow[k\infty]{} \det(XI_n - AB) = \chi_{AB}(X)$

avec $A_k \in GL_n$

$\qquad\qquad \|$

$\chi_{BA_k}(X) = \det(\underbrace{XI_n - BA_k}_{\downarrow k\infty \; XI_n - BA}) \xrightarrow[k\infty]{} \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}(X)$

donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ ...