Licence 2 - 2018/2019

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Juin 2019

Examen de deuxième session

Durée : 2h – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. *(Cours)*

(1) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe un unique entier naturel d tel que $G = d\mathbb{Z}$.

(2) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Donner la définition du pgcd de (a, b). Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b)$ est le générateur de $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 3. Déterminer le le reste de la division euclidienne de $5^{2019} + 7772$ par 7.

Exercice 4. Un phare émet un signal jaune toutes les 15 secondes et un signal rouge toutes les 28 secondes. On aperçoit le signal jaune 2 secondes après minuit et le rouge 8 secondes après minuit. A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?

Exercice 5. Le but de l'exercice est de montrer que : si $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ est un couple d'entier positifs tel que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$, alors le quotient

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

est un carré parfait (le carré d'un nombre entier).

(1) Vérifier cette propriété pour $(a, b) = (1, 1)$.

(2) Montrer que si $a = b \neq 1$ alors $ab + 1$ ne divise pas $a^2 + b^2$.

Dans la suite On pose :

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{N}^*, a < b, (ab + 1)|(a^2 + b^2)\}$$

(3) Montrer que S est non vide.

On souhaite prouver la propriété par contraposée. Dans la suite on note (a, b) un élément de S tel que

$$b = \min \left\{ y \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{N}^*, (x, y) \in S,\ \text{ et } \frac{x^2 + y^2}{xy + 1} \text{ n'est pas un carré} \right\}$$

(4) Posons $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ Montrer que b est racine du polynôme :

$$P = X^2 - akX + (a^2 - k)$$

Soit b' la deuxième racine de ce polynôme.

(5) En considérant les relations coefficients/racines pour P, montrer que b' est un entier relatif.

(6) Montrer qu'on a : $k = \frac{a^2+b'^2}{ab'+1}$, puis :

a. Si $b' = 0$, montrer que k est un carré.
b. Si $b' < 0$, montrer que $k < 0$.
c. Si $b' > 0$, montrer que $b' < a$, et que le couple $(b', a) \in S$.

(7) Conclure.