HLMA304, Arithmétique
Examen de deuxième session, juin 2018

Durée : 2h

Téléphones, calculatrices et documents sont interdits

Exercice 1. *Cours*

Démontrer le théorème de Wilson :

$$(p-1)! \equiv -1[p] \quad \iff \quad p \text{ est premier.}$$

Exercice 2.

(1) Soient n, a, b, c trois entiers positifs tels que $4n = a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que n est aussi une somme de trois carrés

Indication : Considérer les parités de a, b et c.

(2) Montrer qu'aucun entier de la forme $4^m(8k+7)$ n'est somme de trois carrés.

Indication : Réduire le problème à l'aide du (1), puis travailler dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Trouvez la plus petite solution positive du système :

$$\begin{cases} x \equiv 10[22] \\ x \equiv 7[35] \end{cases}$$

Exercice 4. Le nombre 1111 possède-t-il un inverse modulo 1234 ? Si oui, en trouver un représentant.

Exercice 5. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5[7].$$

Exercice 6. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système :

$$\begin{cases} x \wedge y & = x - y \\ x \vee y & = 72 \end{cases}$$

Exercice 7. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ deux entiers premiers entre eux.

(1) Montrer que $(a-b)$ divise $(a^3 - b^3)$ et $(a^2 - b^2)$. On note m et n les entiers tels que

$$(a^3 - b^3) = (a-b)m, \qquad (a^2 - b^2) = (a-b)n.$$

(2) Calculer $m - an$ et $m - bn$. Montrer que $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

(3) Montrer que $\text{pgcd}(a^3 - b^3, a^2 - b^2) = a - b$.

(4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\text{pgcd}(a^{3n} - b^{3n}, a^{2n} - b^{2n}) = a^n - b^n$.