Année 2019-2020
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. On rappelle qu'une distance sur X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les quatre conditions : (i) $d(x,x) = 0$ quel que soit x ; (ii) $d(x,y) > 0$ quels que soient x, y distincts ; (iii) $d(x,y) = d(y,x)$ quels que soient x, y ; (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ quels que soient x, y, z. Pour voir que ces conditions sont indépendantes, trouver un ensemble X et une fonction positive d...

1. ...vérifiant tout sauf (i).
2. ...vérifiant tout sauf (ii).
3. ...vérifiant tout sauf (iii).
4. ...vérifiant tout sauf (iv).

Pour construire vos exemples, vous pouvez essayer de modifier la distance usuelle, ou la distance discrète, sur des ensembles contenant un petit nombre de points (le moins possible).

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer la **deuxième inégalité triangulaire** : $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$ quels que soient $x, y, z \in X$.

Exercice 3. Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $X := ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. On munit X de la distance induite par la distance d_∞ sur $\mathbb{R}^2$. Sur un dessin, représenter les boules de X de centre $(1,0)$ en discutant suivant la valeur du rayon.

Exercice 4. Soit $X = \mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la distance d_∞.

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans (X, d_∞), alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque réel $x \in [0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) := x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite dans (X, d_∞).
3. Montrer que la même suite converge vers la fonction nulle dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_1.

Exercice 5. Déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées, dans $\mathbb{R}$ usuel : (i) $\mathbb{Z}$; (ii) $\mathbb{Q}$; (iii) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; (iv) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

Exercice 6. Déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées, dans $\mathbb{R}^2$ euclidien : (i) $\{(x,y) \mid x>0, y>0\}$; (ii) $\{(x,y) \mid x>0, y\geq 0\}$; (iii) $\{(x,y) \mid x\geq 0, y\geq 0\}$.

Exercice 7. On se place dans $X :=]0,1] \cup \{2\}$ vu comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel. *Dans cet espace* X, les ensembles $]0,1]$, $\{2\}$, $]0,1/2[$, $]0,1/2]$ sont-ils ouverts, fermés ?

Exercice 8. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec les distances d_1 et d_∞.

1. Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que la boule $B_{d_1}(0_E, 1)$ est ouverte dans (E, d_∞).
2. Construire une suite de fonctions $f_n \in E$ telle que $\|f_n\|_1 \to 0$ quand n tend vers l'infini, tout en vérifiant $\|f\|_\infty = 1$. En déduire que la boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte dans (E, d_1).
3. Que peut-on en déduire sur les distances d_1 et d_∞ ?

Exercice 9. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ d_2(x, 0_{\mathbb{R}^2}) + d_2(0_{\mathbb{R}^2}, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire géométriquement les boules $B_\delta(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ pour $r > 0$.
3. Si a n'est pas l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$, décrire géométriquement les boules $B_\delta(a, r)$ lorsque $0 < r \leq \|a\|$ puis lorsque $r > \|a\|$.
4. Trouver une suite de points du plan qui converge pour la distance euclidienne mais qui ne converge pas pour la distance δ.
5. Les distances d_2 et δ sont-elles équivalentes ?
6. La distance δ provient-elle d'une norme N sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ pour $x, y \in X$.

1. Montrer que δ est une distance sur X.
2. Montrer que d et δ définissent les mêmes ouverts.

Exercices supplémentaires

Exercice 11. 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Que pensez-vous du signe de $b^2 - 4ac$?

2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels. La somme $\sum_{i=1}^n (x_i - \lambda y_i)^2$ peut s'écrire $a\lambda^2 + b\lambda + c$ en la développant, et elle est bien sûr positive. Qui sont a, b, c ? Montrer que la question précédente démontre l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \tag{1}$$

3. En déduire l'**inégalité de Minkowski** pour l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \tag{2}$$

   où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

4. En déduire l'inégalité triangulaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z) \tag{3}$$

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique. On se donne une fonction $\phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ strictement croissante telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$ pour tous $x, y \in [0, +\infty[$. Montrer qu'alors la fonction $D := \phi \circ d$ est également une distance sur X.

Exercice 13. On cherche à définir une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ des suites réelles. Pour cela :

1. Montrer que $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ (utiliser l'exercice précédent avec la fonction $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$).
2. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, on pose :

$$D(x, y) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} d(x_k, y_k)$$

   Montrer que D est bien définie et que c'est une distance sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

3. Quel est le diamètre de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ pour cette distance ?

Exercice 14. On dit qu'une distance d sur un ensemble X est **ultramétrique** si elle vérifie l'« inégalité ultramétrique » :

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}. \tag{4}$$

1. Montrer que l'inégalité (4) implique l'inégalité triangulaire ordinaire.
2. Dans un espace ultramétrique, montrer que :

a) si $d(x,y) \neq d(y,z)$, alors il y a égalité dans (4), autrement dit « tous les triangles de X sont isocèles ».
b) tout point d'une boule ouverte (ou fermée) est centre de cette boule.
c) les boules (ouvertes, fermées) sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 15. On considère l'ensemble X des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Pour $x, y \in X$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$, et $d(x,y) = \dfrac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}}$ si $x \neq y$.

1. Soient x, y, z trois suites deux à deux distinctes. Montrer que
$$\min\{n \mid z_n \neq x_n\} \geq \min\left\{\min\{n \mid x_n \neq y_n\}, \min\{n \mid y_n \neq z_n\}\right\}.$$
2. En déduire que $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$. En déduire que d est une distance ultramétrique sur X.

Exercice 16. Soit p un nombre premier fixé. Pour tout nombre entier non nul n, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Par exemple, $v_3(18) = 2$ et $v_5(18) = 0$.

1. Montrer que $v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$ quels que soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que, pour un nombre rationnel $r = \pm\frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $v_p(r) := v_p(m) - v_p(n)$ ne dépend pas de l'écriture de r comme fraction.
3. Par exemple, combien valent $v_2(2)$, $v_2(1/2)$, $v_2(3/5)$?
4. Montrer que $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ quels que soient $r, s \in \mathbb{Q}^*$. En supposant de plus que $r - s \neq 0$, montrer que $v_p(r - s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$.

La **distance** p-**adique** entre deux nombres rationnels $x, y \in \mathbb{Q}$ est définie par $d(x,y) := p^{-v_p(x-y)}$ si $x \neq y$, et $d(x,x) := 0$. Par exemple, vérifier que $d_3(2, 252) = 1$ et $d_5(2, 252) = 1/5^3$.

5. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
6. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
7. Montrer que la suite $x_1 = 3$, $x_2 = 33$, $x_3 = 333$ etc. converge vers $-1/3$ dans $(\mathbb{Q}, d_5)$.