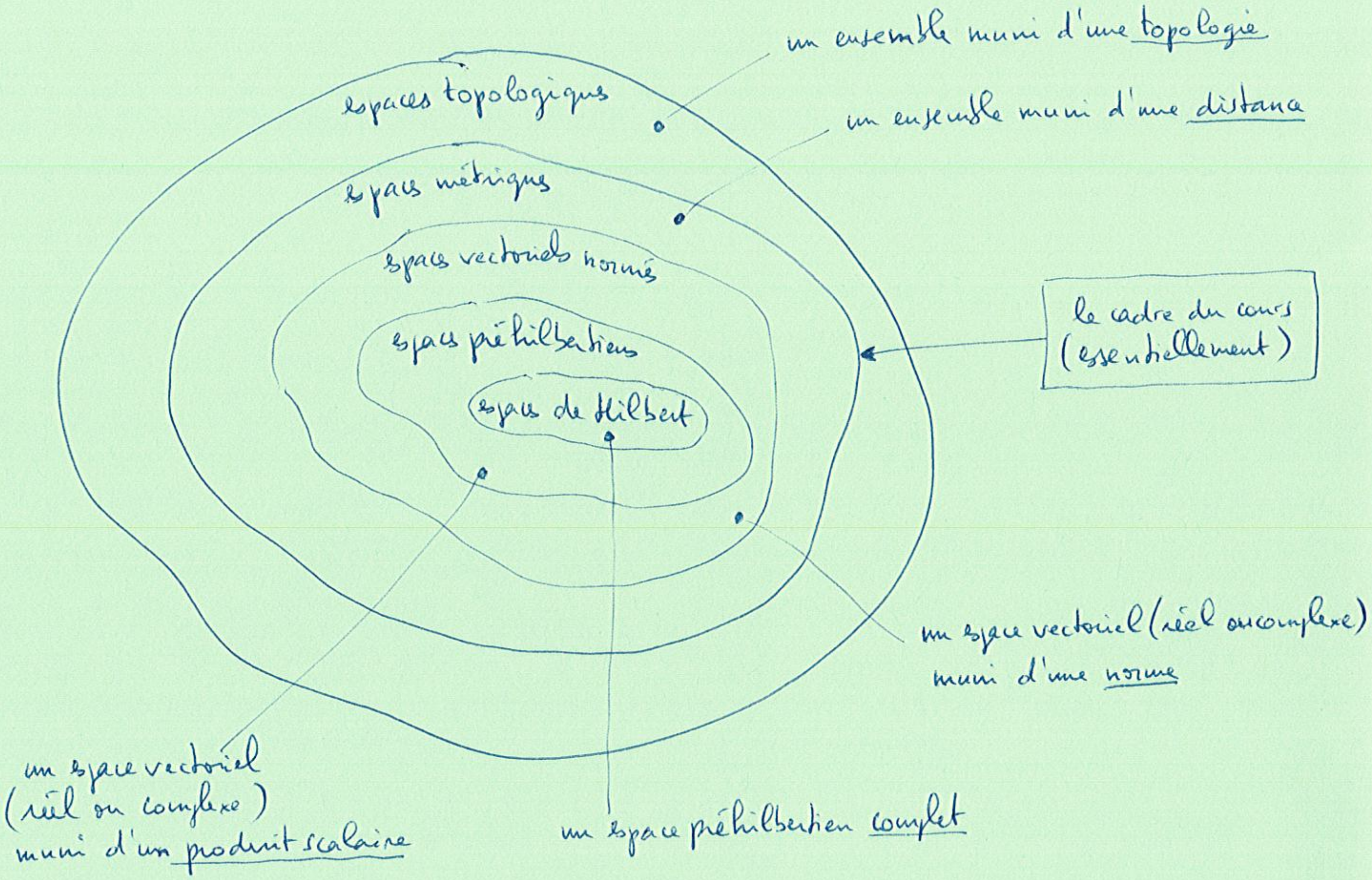
HLMA502

Topologie des espaces métriques



topo rappels

Rappels

Normes

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

p.ex $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, espace des suites réelles, ... ($\leftarrow \mathbb{R}$-ev)

$\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots, \mathbb{C}^n, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, espace des suites complexes... ($\leftarrow \mathbb{C}$-ev)

une <u>norme</u> sur E = une fonction $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
$$\begin{cases} N(x) \geq 0 \\ N(x) = 0 \iff x = 0_E \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x+y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$$

$|\lambda|$ = valeur absolue ou module

un <u>espace vectoriel normé</u> (<u>evn</u>) = un espace vectoriel E muni d'une norme N

(!) on note souvent $\|x\| = N(x)$

<u>exemples</u> : ① $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ (valeur absolue)

② $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}$ (module)

③ <u>sur $\mathbb{R}^n$</u>
$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$
où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

④ <u>sur $\mathbb{C}^n$</u>
$$\|z\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$
$$\|z\|_1 = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$
$$\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$$
où $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

⑤ <u>sur $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$</u> l'ensemble (l'ev) des fonctions <u>bornées</u> $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

⑥ <u>sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$</u> $\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,dx}$

Produits scalaires

E = un espace vectoriel réel

un produit scalaire sur E = une forme bilinéaire symétrique défini positive

ie
$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

tq
$$\begin{cases} \langle \lambda x + \lambda' x', y\rangle = \lambda \langle x,y\rangle + \lambda' \langle x',y\rangle \\ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \\ \langle x,x\rangle \geqslant 0 \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0_E \end{cases}$$

Exemples ① sur $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$

② sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$

topo
I - 1

I. Espaces métriques

la notion de distance : inventée en 1907 par Fréchet dans le but d'étendre les concepts de limite de suite et de continuité d'une fonction à des espaces autres que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$: des espaces dont les "points" sont des fonctions, des suites de nombres, des courbes géométriques, etc...

⊕ unifier dans un m̂ cadre différentes présentations de "limite" et "continuité" qui avaient commencé à apparaître dans des espaces de fonctions, de suites, de courbes, etc...

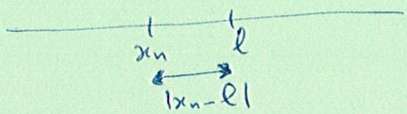
qu'est-ce qu'une suite (réelle) convergente ?

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ une suite de nombres réels

elle converge vers le nombre réel l, qui est alors la limite de la suite,

si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* ; \forall n \geq N, \underbrace{|x_n - l|}_{\text{la distance entre les deux nombres } x_n \text{ et } l} < \varepsilon$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\infty} x_n = l \\ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \end{cases}$$



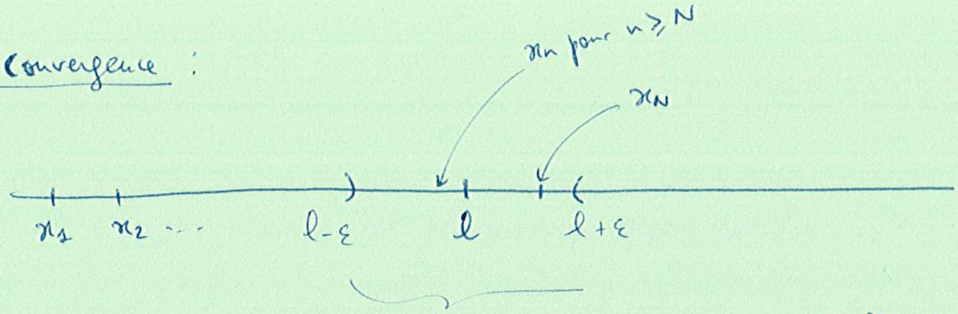
qu'est-ce qu'une fonction continue ?

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ une fonction $\qquad a \in \mathbb{R}$

f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{|x - a|}_{\text{la distance entre } x \text{ et } a} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{\text{la distance entre } f(x) \text{ et } f(a)} < \varepsilon$$

Convergence :



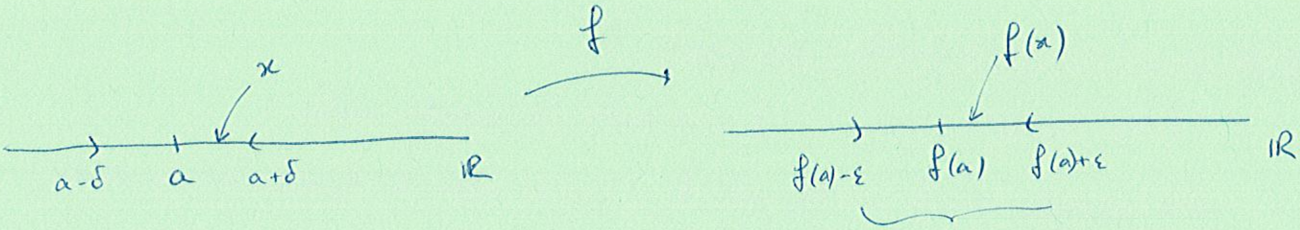
① on se donne un $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il...

② ...il existe alors un rang N...

③ ... au-delà duquel tous les termes de la suite sont ε-proches de l

(!) en général, N dépend de ε : plus ε est petit, plus N est grand

Continuité :



① on se donne un $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il...

② ...il existe alors un $\delta > 0$...

③ ...tel que si x est δ-proche de a...

④ ... alors $f(x)$ est ε-proche de $f(a)$

(!) en général, δ dépend de ε : plus ε est petit, plus δ est petit lui aussi

topo
I-2

1 Distance, espace métrique

Déf Soit X un ensemble (en général on le suppose non vide...)

Une distance sur X est une fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $d(x,y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ [condition de symétrie]

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ [inégalité triangulaire]

quels que soient $x,y,z \in X$

Un espace métrique (X,d) est un ensemble X muni d'~~une~~ distance d

On dit que $d(x,y)$ est la distance entre les deux points x et y.

les éléments d'un espace métrique sont souvent appelés "points" (intuition géométrique)

⚠ Un même ensemble est susceptible de recevoir plusieurs distances différents.

exercice Dans un espace métrique (X,d), montrer que

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y,z \in X$$

"deuxième inégalité triangulaire" ⚠ utile

Exemples

exemple 1 Soit X un ensemble quelconque (non vide...)

La distance discrète sur X est définie par :

$$\boxed{d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}}$$

⚠ peu utile en pratique, mais intéressante pour tester l'intuition et les concepts c'est bien une distance sur X :

(i) et (ii) sont évidemment vérifiées

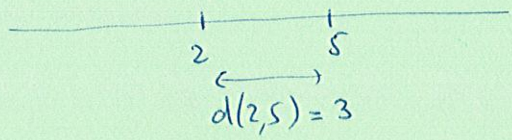
(iii) inég. Δ ? il suffit de distinguer des cas :

* si $x = y = z$, alors $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ s'écrit $0 \leq 0 + 0$, ce qui est vrai
* si $x = y$ et $y \neq z$, on obtient $1 \leq 0 + 1$
* si $x = z$ et $y \neq x$: $0 \leq 1 + 1$
* si $y = z$ et $x \neq y$: $1 \leq 1 + 0$
* si $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$: $1 \leq 1 + 1$

l'inégalité est bien vérifiée dans tous les cas.

<u>exemple 2</u> $X = \mathbb{R}$ avec $d(x,y) = |x - y|$ valeur absolue

c'est la <u>distance usuelle</u> sur $\mathbb{R}$ on dit que $(\mathbb{R}, d)$ est "<u>$\mathbb{R}$ usuel</u>"



<u>dém</u>

(i) et (ii) évidents

(iii) inég Δ facile : $|x+y| \leq |x| + |y|$

on en déduit :

$d(x,z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$

<u>exemple 3</u> $X = \mathbb{C}$ avec $d(z,w) = |z - w|$ module

c'est la <u>distance usuelle</u> sur $\mathbb{C}$ "<u>$\mathbb{C}$ usuel</u>"

<u>dém</u> : comme pour $\mathbb{R}$ usuel ci-dessus

(!) le module des nbres complexes vérifie lui-aussi $|z + w| \leq |z| + |w|$

topo
I-3

<u>exemple 4</u> Sur $X = \mathbb{R}^n$ on définit trois distances classiques :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max\left(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\right) \\ d_1(x,y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \\ d_2(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}}$$

d_2 est la <u>distance euclidienne</u> sur $\mathbb{R}^n$ $\qquad (\mathbb{R}^n, d_2)$ est "<u>$\mathbb{R}^n$ euclidien</u>"

<u>p.ex</u> dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad x = (3, 1) \qquad y = (2, 5)$

$$d_\infty(x,y) = \max\left(|3-2|, |1-5|\right) = 4$$

$$d_1(x,y) = |3-2| + |1-5| = 1 + 4 = 5$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

d_∞ est bien une distance :

(i) $d_\infty(x,y) \geq 0$ évident

si $d_\infty(x,y) = 0$, alors $|x_1 - y_1| = \dots = |x_n - y_n| = 0$

donc $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$

c-à-d $x = y$

(ii) $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$ évident

(iii) inég Δ

$$d_\infty(x,z) = \max\left(|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\right)$$

or $|x_1 - z_1| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|$ $\qquad$ inég Δ dans $\mathbb{R}$

$$\leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$$

et de même pour $|x_2 - z_2|, \dots, |x_n - z_n|$

d'où $d_\infty(x,z) = \max\left(\underbrace{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|}\right) \leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$

tous plus petits que $d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$

d_1 est bien une distance

(i) $d_1(x,y) \geq 0$ évident

si $d_1(x,y) = 0$, alors $|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = 0$

donc $|x_1 - y_1| = \dots = |x_n - y_n| = 0$

donc $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$

c-à-d $x = y$

(ii) $d_1(x,y) = d_1(y,x)$ évident

(iii) inég Δ

$$d_1(x,z) = |x_1 - z_1| + \dots + |x_n - z_n|$$

inég Δ dans $\mathbb{R}$

$$\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$$

$$= \underbrace{|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|}_{d_1(x,y)} + \underbrace{|y_1 - z_1| + \dots + |y_n - z_n|}_{d_1(y,z)}$$

$\blacksquare$

d_2 est bien une distance

(i) évident

(ii) aussi

(iii) inég Δ c'est plus difficile

on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

à partir de laquelle on démontre l'inégalité de Minkowski

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

! à retenir

et on en déduit l'inégalité triangulaire :

$$d_2(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\underbrace{x_i - y_i}_{a_i} + \underbrace{y_i - z_i}_{b_i})^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \underset{\text{Minkowski}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = d_2(x,y) + d_2(y,z)$$

$\blacksquare$

exemple 5 soit A un ensemble quelconque

on note $X = \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées $A \longrightarrow \mathbb{R}$

rappel : $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est bornée s'il existe un réel $M \geqslant 0$

tel que $|f(a)| \leq M \quad \forall a \in A$

si f ~~est~~ et g sont bornés, alors $f - g$ est borné :

$$|(f-g)(a)| = |f(a) - g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq M_f + M_g$$

pour $f, g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, on pose :

$$\boxed{d_\infty(f,g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|}$$

(!) ce "sup" existe et est bien un nombre fini car $f - g$ est bornée...

(!) d_∞ = la distance de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(X, A)$

d_∞ est bien une distance sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$

(i) $d(f,g) \geqslant 0$ ok

si $d(f,g) = 0$ c'est que $|f(a) - g(a)| = 0 \ \forall a \in A$

donc $f(a) = g(a) \ \forall a \in A$

c-à-d $f = g$

(ii) $d(f,g) = d(g,f)$ évident

(iii) inég Δ $\quad f, g, h \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$

pour chaque $a \in A$, on a $|f(a) - h(a)| \leq |f(a) - g(a)| + |g(a) - h(a)|$ inég Δ dans $\mathbb{R}$

$$\leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

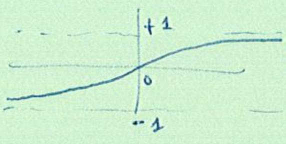
ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on peut passer au sup :

$$d_\infty(f,h) = \sup_{a \in A} |f(a) - h(a)| \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

☑

(!) le "sup" n'est pas toujours un "max", autrement dit il n'est pas toujours "réalisé"

exemple :



dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$d_\infty(f, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la fonction nulle}}}{0}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - 0| = \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|}_{} = 1$$

mais il n'existe pas de x pour lequel $|f(x)| = 1$ ...

rem | lorsque $A = \{1, 2, \dots, n\}$ on retrouve $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ avec la distance d_∞ $\left\{\begin{matrix}\text{déjà}\\ \text{vue}\end{matrix}\right.$

lorsque $A = \mathbb{N}$, on obtient l'espace des suites réelles bornées (avec une distance d_∞)

exemple 6 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$

Considérons $X = C^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

On sait déjà (et on reverra, dans le chapitre sur la compacité)

que toute fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes...)

Sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$ on peut donc mettre la distance d_∞...

Mais il y a d'autres choix possibles, notamment :

$$\boxed{\begin{aligned} d_1(f,g) &:= \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \\ d_2(f,g) &:= \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt} \end{aligned}}$$

d_1 est bien une distance

(i) $d_1(f,g) \geq 0$ ok

si $d_1(f,g) = 0$ c-à-d si $\int_a^b \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\text{une fonction continue positive}} dt = 0$, alors $|f(t) - g(t)| = 0 \ \forall t \in [a,b]$

(!) propriété importante de l'intégrale des fonctions continues

donc $f(t) = g(t) \ \forall t \in [a,b]$

c-à-d $f = g$

(ii) $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ évident

(iii) pour chaque $t \in [a,b]$, on a $|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|$

d'où en intégrant : $\int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt + \int_a^b |g(t) - h(t)|\, dt$

c-à-d $d_1(f,h) \leq d_1(f,g) + d_1(g,h)$

d_2 est une distance plus difficile (Cauchy-Schwarz pour les intégrales !)

Distance associée à une norme

beaucoup des exemples précédents se ressemblent...

ce n'est pas étonnant : à l'exception de la distance discrète, toutes les distances précédents proviennent d'une norme sur un espace vectoriel...

<u>rappel</u> soit E un $\mathbb{R}$- ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

une <u>norme</u> sur E est une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ "longueur des vecteurs"

telle que (i) $N(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0_E$

(ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$)

un <u>espace vectoriel normé</u> (evn) = un couple (E, N) $\begin{cases} E \text{ ev} \\ N \text{ norme sur } E \end{cases}$

<u>Prop</u> Soit (E, N) un evn.

Alors $\boxed{d(x,y) := N(x-y)}$ est une distance sur E

<u>dém</u> (i) $d(x,y) \geqslant 0$ car $N(x-y) \geqslant 0$

$d(x,y) = 0 \iff N(x-y) = 0 \iff x - y = 0_E \iff x = y$

(ii) $d(y,x) = N(y-x) = N((-1)(x-y)) = |-1| N(x-y) = N(x-y)$

(iii) $d(x,z) = N(x-z) = N(x-y+y-z) \leq N(x-y) + N(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$

<u>exemples</u> * $|\cdot|$ valeur absolue norme sur $\mathbb{R}$, $|\cdot|$ module norme sur $\mathbb{C}$

$\to$ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ usuels

* trois normes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \\ \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}}$$

$\to$ distance d_∞

$\to$ distance d_1

$\to$ distance d_2

* norme sur $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$: $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} |f(a)|}$ → distance de la convergence uniforme

* normes sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$: $\boxed{\begin{array}{l} \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \end{array}}$

(!) certaines normes (pas toutes !) proviennent d'un <u>produit scalaire</u>

E ev réel   produit scalaire = $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique défini positif

→ inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

d'où $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ une <u>norme</u> sur E (→ une distance sur E...)

<u>exemples</u> :

$\mathbb{R}^n$ $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ ⤳ $\|x\|_2$ et $d_2(x,y)$ distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ ...

$C^0([a,b],\mathbb{R})$ $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ ⤳ $\|f\|_2$ et $d_2(f,g)$ distance euclidienne sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ...

<u>rem</u> : une norme qui provient d'un produit scalaire doit vérifier

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$ exo !

montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ ne provient pas d'un produit scalaire, en trouvant des vecteurs x et y qui ne vérifient pas l'égalité ci-dessus

Sous-espace d'un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A une partie de X.

La restriction de d à A définit alors une distance d_A sur A

$$\boxed{d_A(x,y) := d(x,y) \quad \forall x,y \in A}$$

On dit que d_A est la distance sur A <u>induite</u> par d.

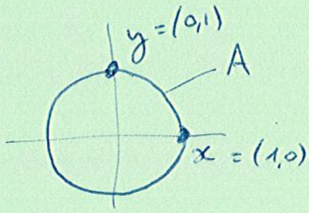
On dit que (A, d_A) est un <u>sous-espace métrique</u> de (X,d)...

<u>exemple</u> $\mathbb{R}$ usuel $\rightsquigarrow$ distance usuelle sur $[0,1)$, sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$, etc...

$\mathbb{R}^2$ euclidien, A = cercle unité

$d_A(x,y) = d_2(x,y)$

$= ?$



Produit d'espaces métriques

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques (éventuellement les mêmes...)

Il y a plusieurs distances utiles que l'on peut définir sur $X \times Y$

à partir de d_X et d_Y :

$$\boxed{\begin{aligned}
d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) &:= \max\big(d_X(x,x'), d_Y(y,y')\big) \\
d_1\big((x,y),(x',y')\big) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\
d_2\big((x,y),(x',y')\big) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}
\end{aligned}}$$

⚠ on verra que ces trois distances sont "<u>équivalentes</u>" en un certain sens.

d_∞ est bien une distance

(i) $d_\infty((x,y),(x',y')) \geqslant 0$ ok

$d_\infty((x,y),(x',y')) = 0 \iff d_X(x,x') = 0$ et $d_Y(y,y') = 0$

$\iff x = x'$ et $y = y'$

$\iff (x,y) = (x',y')$

(ii) $d_\infty((x,y),(x',y')) = d_\infty((x',y'),(x,y))$ évident

(iii) inég Δ

on se donne (x,y), (x',y') et (x'',y'') trois points de $X \times Y$

$$\begin{cases} \text{alors } d_X(x,x'') \leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y'')) \\ \text{de m } d_Y(y,y'') \leq \dots \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y'')) \end{cases}$$

et donc

$$\underbrace{\max(d_X(x,x''), d_Y(y,y''))}_{\text{c'est } d_\infty((x,y),(x'',y''))} \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$$

c'est ~~[illegible]~~

$\boxed{//}$ $d_\infty((x,y),(x'',y''))$

d_1 est bien une distance

(i) et (ii) facile

(iii) inég Δ

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x'',y'')) &= d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') \\ &\leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') + d_Y(y,y') + d_Y(y',y'') \\ &= \underbrace{d_X(x,x') + d_Y(y,y')}_{d_1((x,y),(x',y'))} + \underbrace{d_X(x',x'') + d_Y(y',y'')}_{d_1((x',y'),(x'',y''))} \end{aligned}$$

$\boxed{//}$

topo
I-7

d_2 est bien une distance

(i) et (ii) faciles

(iii) inég Δ on se donne (x,y), (x',y') et $(x'',y'') \in X\times Y$

on veut mq $d_2\big((x,y),(x'',y'')\big) \leq d_2\big((x,y),(x',y')\big) + d_2\big((x',y'),(x'',y'')\big)$

c-à-d

$$\underbrace{\sqrt{d_X(x,x'')^2+d_Y(y,y'')^2}}_{\substack{\text{ceci est}\\ \|(a_1,a_2)\|_2}} \leq \underbrace{\sqrt{d_X(x,x')^2+d_Y(y,y')^2}}_{\substack{\text{ceci est}\\ \|(b_1,b_2)\|_2}} + \underbrace{\sqrt{d_X(x',x'')^2+d_Y(y',y'')^2}}_{\substack{\text{ceci est}\\ \|(c_1,c_2)\|_2}}$$

où $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ (!)

or on sait que

$$\begin{cases} d_X(x,x'') \leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') \\ d_Y(y,y'') \leq d_Y(y,y') + d_Y(y',y'') \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} a_1 \leq b_1 + c_1 \\ a_2 \leq b_2 + c_2 \end{cases}$

donc $\|(a_1,a_2)\|_2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{regarder comment}\\ \|\cdot\|_2 \text{ est défini}}}{\leq} \|(b_1+c_1, b_2+c_2)\|_2 = \|(b_1,b_2)+(c_1,c_2)\|_2$

$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{inég } \Delta\\ \text{dans } \mathbb{R}^2 \text{ euclidien (!)}}}{\leq} \|(b_1,b_2)\|_2 + \|(c_1,c_2)\|_2$

c'est l'inégalité voulue

$\blacksquare$

Plus généralement : on définit des distances d_∞, d_1 et d_2 sur $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$

où $(X_1,\delta_1), \dots, (X_n,\delta_n)$ sont des espaces métriques donnés

par exemple : à partir de $\mathbb{R}$ usuel, on trouve $\mathbb{R}^n$ avec les distances d_∞, d_1 et d_2 déjà définies (premiers exemple de distance)

(2) Boules d'un espace métrique

Certains sous-ensembles d'un espace métrique vont jouer un rôle fondamental

Soit (X,d) un espace métrique.

Pour $a \in X$ et r un nombre réel ≥ 0, on pose :

$B(a,r) := \{x \in X \,;\, d(a,x) < r\}$ boule ouverte

$D(a,r) := \{x \in X \,;\, d(a,x) \leq r\}$ boule fermée — de centre a et rayon r

$S(a,r) := \{x \in X \,;\, d(a,x) = r\}$ sphère

(!) pas vraiment de notation standard (= universelle) pour les boules fermées...
autres notations possibles : $B'(a,r)$, $B_f(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ ...

rem si $r=0$ alors $B(a,r) = \emptyset$

$D(a,r) = S(a,r) = \{a\}$

Exemples de boules

dans $\mathbb{R}$ usuel

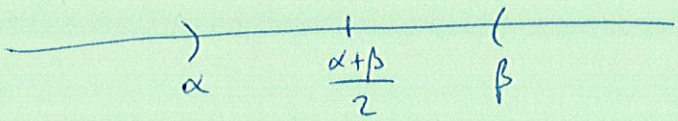
$B(a,r) = \,]a-r, a+r[$

$D(a,r) = [a-r, a+r]$ et $S(a,r) = ?$

réciproquement, tout intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ est une boule ouverte :

en supposant $\alpha < \beta$ (si $\alpha=\beta$ c'est l'ensemble vide, et c'est bien une boule ouverte...)

alors $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est le milieu de $]\alpha,\beta[$

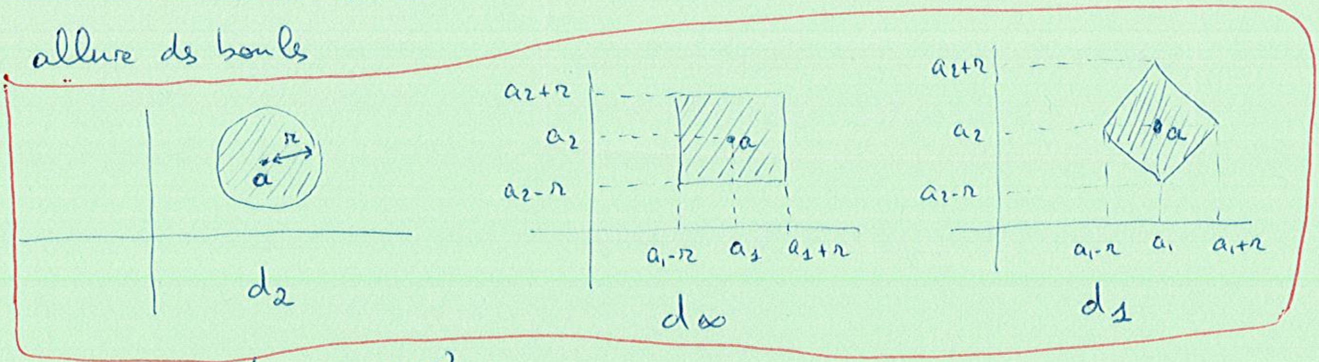


$$\text{et }]\alpha,\beta[\,= B\Big(\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\text{centre}}, \underbrace{\frac{\beta-\alpha}{2}}_{\text{rayon}}\Big)$$

topo
I-8

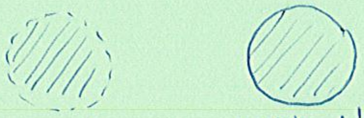
dans $\mathbb{R}^2$ avec d_∞, d_1, d_2 :

allure des boules



$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

boules ouvertes / boules fermées :



le "bord" n'y est pas

le "bord" y est

par exemple pour $a = (0,0)$ et $r = 1$

$\underline{d_2}$ est la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ (Pythagore...)
donc la boule $B_{d_2}((0,0), 1)$ est bien comme sur le dessin

$\underline{d_\infty}$: $x = (x_1, x_2) \in B_{d_\infty}((0,0), 1) \iff d_\infty((0,0), (x_1, x_2)) < 1$

$\iff \max(|x_1|, |x_2|) < 1$

$\iff |x_1| < 1$ et $|x_2| < 1$

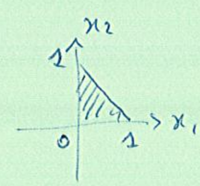
$\iff -1 < x_1 < +1$ et $-1 < x_2 < +1$

$\iff (x_1, x_2) \in]-1, 1[\times]-1, 1[\longrightarrow$ ok

$\underline{d_1}$: $x = (x_1, x_2) \in B_{d_1}((0,0), 1) \iff d_1((0,0), (x_1, x_2)) < 1$

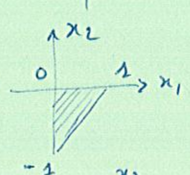
$\iff |x_1| + |x_2| < 1$

$\iff$ $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 + x_2 < 1$ $\longrightarrow$



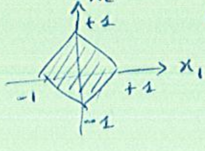
ou

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \leq 0$ et $x_1 - x_2 < 1$ $\longrightarrow$



ou
...
ou
...

d'où la boule



comme annoncé

dans X discret

$a \in X$, $r > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } 0 < r \leq 1, \text{ alors } B(a,r) = \{a\} \\ \text{si } r > 1, \text{ alors } B(a,r) = X \end{array}}$$

les boules sont ou bien très petites ou bien très grandes !

$X = \{a, b, c\}$ ensemble à trois éléments

$\{a\} = B(a, \frac{1}{2}) = B(a, 1)$

$\{a,b,c\} = B(a,2) = B(a, 1+\varepsilon)$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$

dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$ avec d_∞

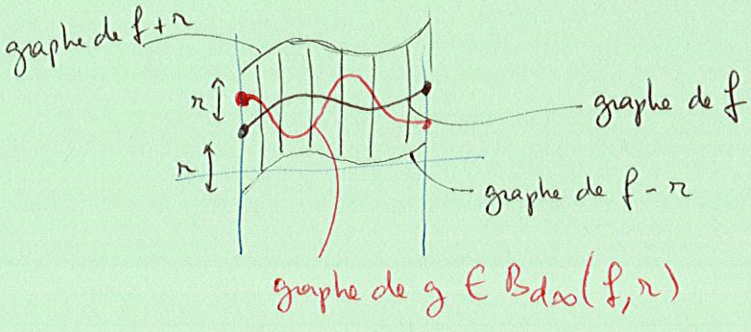
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue donnée

$$g \in B_{d_\infty}(f,r) \iff \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < r$$

$$\iff \forall x \in [0,1], \ |f(x) - g(x)| < r$$

$$\iff \forall x \in [0,1], \ f(x) - r < g(x) < f(x) + r$$

$\iff$ le graphe de g est compris entre le graphe de $f - r$ et le graphe de $f + r$



Boules d'un sous-espace

(X,d) espace métrique

soit A une partie de X (supposée non vide...)

si $a \in A$ et $r>0$, alors

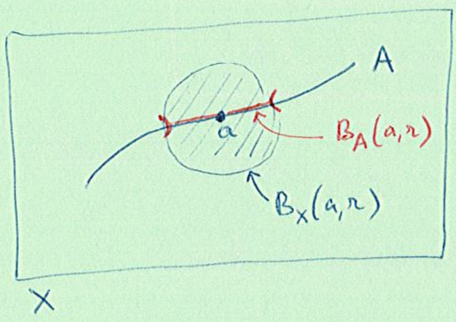
$$\boxed{\begin{aligned} B_A(a,r) &= A \cap B_X(a,r) \\ D_A(a,r) &= A \cap D_X(a,r) \end{aligned}}$$

dém
$$\begin{aligned} B_A(a,r) &= \{x \in A \,;\, d_A(a,x) < r\} \\ &= \{x \in A \,;\, d(a,x) < r\} \\ &= \{x \in X \,;\, x \in A \text{ et } d(a,x) < r\} \\ &= A \cap B_X(a,r) \end{aligned}$$

et de m̂ pour la boule fermée.

$\square$

dessin :

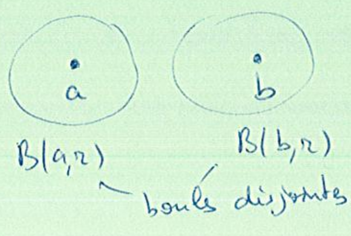


Séparation

dans un espace métrique, les boules "séparent" les points

Prop Soit (X,d) un espace métrique. Soient $a, b \in X$ avec $a \neq b$.
Il existe alors un rayon $r>0$ tel que $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$

On dit qu'un espace métrique est séparé



dém $a \neq b$ donc $d(a,b) > 0$ ⚠

posons $r = \frac{d(a,b)}{2}$ c'est bien un nombre strictement positif

on affirme que $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$

en effet : si $x \in B(a,r) \cap B(b,r)$

alors $d(a,x) < r$ et $d(x,b) < r$

d'où $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < 2r = d(a,b)$

c-à-d $d(a,b) < d(a,b)$ contradiction

exercice On fixe un point $x \in X$.

Expliciter les sous-ensembles $\bigcap_{r>0} B(x,r)$ et $\bigcup_{r>0} B(x,r)$

Diamètre d'une partie, partie bornée

soit A une partie de X (X,d) espace métrique (éventuellement $A = X$ ...)

le diamètre de A est défini par :

$$\boxed{\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y)\ ;\ x \in A, y \in A\}}$$

il se peut que $\mathrm{diam}(A) = +\infty$ ... p.ex $\mathrm{diam}(\mathbb{R} \text{ usuel}) = +\infty$

On dit que A est bornée si son diamètre est fini.

exercice montrer que $\mathrm{diam}(B(a,r)) \leq 2r$

trouver des cas d'espaces métriques où il y a égalité, et des cas idem où il n'y a pas égalité

exercice montrer que A est bornée si et seulement si A est contenue dans une "grosse" boule

c-à-d si et seulement si il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(x,r)$

montrer $\boxed{\Rightarrow}$ on peut prendre x quelconque, et r suffisamment grand...

et $\boxed{\Leftarrow}$ si $A \subseteq B(x,r)$, comment majorer $\mathrm{diam}(A)$?...

exercice quel est le diamètre d'une boule dans un espace <u>discret</u> ?

(ça dépend du rayon...)

(3) Convergence des suites et continuité des applications dans les espaces métriques

On commence par la cv des suites

soit (X,d) un espace métrique

soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de X [c'est-à-dire une application $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$...]

soit $a \in X$

<u>Déf</u> On dit que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ <u>converge</u> vers x dans (X,d), ou encore que a est la <u>limite</u> de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans (X,d),

~~[illegible]~~ si $\underbrace{d(x_n, a) \xrightarrow[n\infty]{} 0}_{\text{dans } \mathbb{R}\text{, au sens usuel}}$

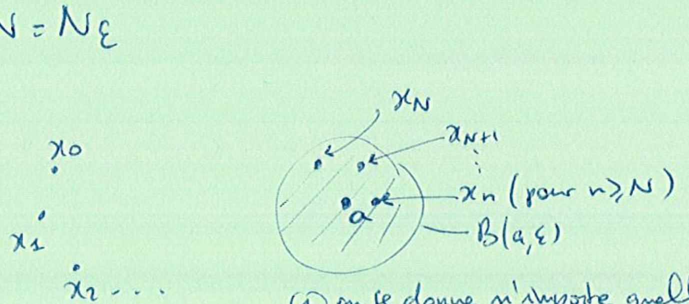
voir l'intro du chapitre (!)

<u>notation</u> : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ $\quad \lim\limits_{n\infty} x_n = a$

<u>traduction en termes de boules</u> :

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\infty]{} a} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,;\, \forall n \geqslant N, \ d(x_n, a) < \varepsilon$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,;\, \forall n \geqslant N, \ x_n \in B(a, \varepsilon)$$

(!) $N = N_\varepsilon$



(1) on se donne n'importe quelle boule $B(a,\varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut...

(2)... il existe alors un rang N...

(3) ... à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cette boule $B(a,\varepsilon)$

exemple (on y reviendra dans le chapitre suivant)

dans $\mathbb{R}$ usuel : c'est la notion usuelle de limite

dans $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ et de m̂ avec d_1 ou avec d_2

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\infty]{} (x,y) \Leftrightarrow \left(x_n \xrightarrow[n\infty]{} x \text{ et } y_n \xrightarrow[n\infty]{} y \text{ dans } \mathbb{R} \text{ usuel} \right)$$

on y reviendra...

dans X discret (!)

on sait que $B(a,r) = \{a\}$ si $0 < r \leq 1$...

donc $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \Leftrightarrow$ il existe un rang à partir duquel la suite est constamment égale à a

dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec d_∞

$$f_n \xrightarrow[n\infty]{} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

on comprend pourquoi on appelle d_∞ la "distance de la cv uniforme"...

on passe aux fonctions (applications) continues...

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques

Soit $f : X \to Y$ une application, et soit $a \in X$

Déf On dit que f est continue en a si

voir l'intro du chapitre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in X, d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

(!) traduction en termes de boules

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in X, x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon) \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)}$$

topo
I-10

② ... il existe alors une (suffisamment petite) boule de centre a et de rayon $\delta > 0$ ...

③ ... tel que tout point x de $B_X(a, \delta)$ ...

① on se donne n'importe quelle boule de centre $f(a)$ et de rayon $\varepsilon > 0$ ...

④ ... s'envoie par f dans $B_Y(f(a), \varepsilon)$

rem ! $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon) \iff B_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$

~~...~~ c'est purement ensembliste

$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose que $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

soit $x \in B_X(a,\delta)$ alors $f(x) \in f(B_X(a,\delta))$ donc $f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$

c-à-d $x \in f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$

donc $B_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$

$\boxed{\Leftarrow}$ on suppose que $B_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$

~~soit $x \in B_X(a,\delta)$~~

soit $y \in f(B_X(a,\delta))$

on peut donc trouver $x \in B_X(a,\delta)$ tel que $y = f(x)$

mais alors $x \in f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$ c-à-d $f(x) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$

et donc $y \in B_Y(f(a), \varepsilon)$

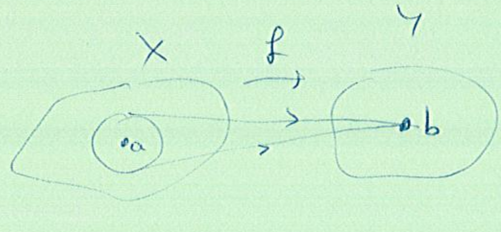
donc $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

$\boxed{\not{z}}$

exemples (on y reviendra au chapitre suivant)

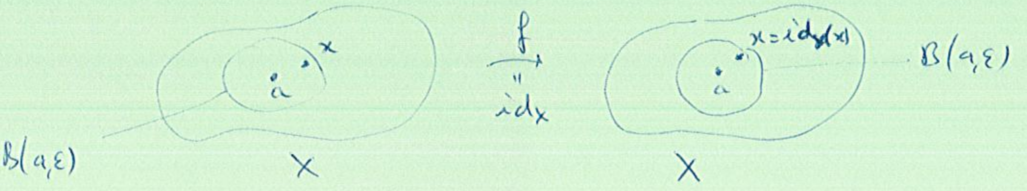
① toute application constante est continue (en tout point)

pour $\varepsilon > 0$ quelconque, n'importe quel $\delta > 0$ convient !



② les applications identité $X \xrightarrow{id_X} X$ sont continues (en tout point)

prendre $\delta = \varepsilon$!



④ Les ouverts d'un espace métrique

⚠ En quoi les notions de "convergence des suites" et "continuité des applications" dépendent-elles des distances choisies ? Des choix différents de distances peuvent-ils amener les mêmes notions ? [oui] A-t-on même besoin des distances pour en parler ? [non]

Les <u>ouverts</u> vont remplacer les boules ouvertes dans bcp de situations... Et on verra que des distances différentes peuvent avoir les mêmes ouverts.

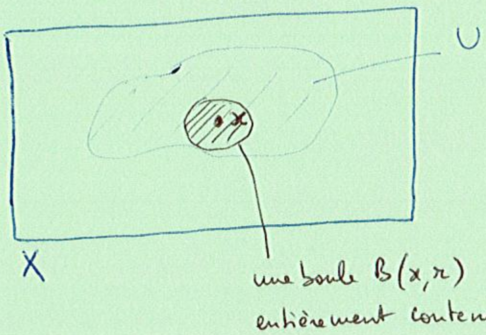
Soit (X,d) un espace métrique.

<u>Déf</u> Une partie $U \subseteq X$ est <u>ouverte</u> dans (X,d) [ou encore : "U est un ouvert de (X,d)"]

si $\forall x \in U, \exists r > 0 ; B(x,r) \subseteq U$

"tout point de U est le centre d'une (assez petite) boule ouverte entièrement contenue dans U"

⚠ $r = r_x$ en général

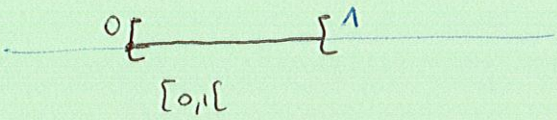


⚠ on ne demande évidemment pas que n'importe quelle boule centrée en x soit contenue dans U

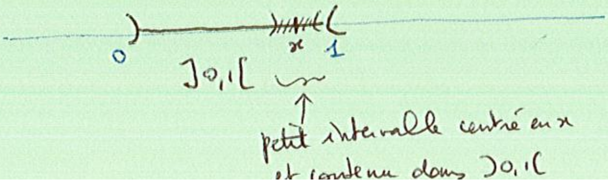
<u>exemples</u> ① <u>dans $\mathbb{R}$ usuel</u>

$[0,1[$ n'est pas ouvert

$]0,1[$ est ouvert



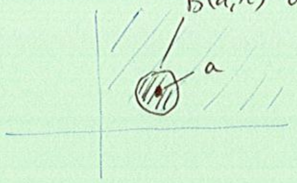
0 n'est le centre d'aucune boule ouverte (= intervalle ouvert) entièrement contenu dans $[0,1[$



tout point $x \in]0,1[$ est le centre d'un petit intervalle ouvert entièrement contenu dans $]0,1[$

topo
I-11

② dans $\mathbb{R}^2$ euclidien



$B(a,r)$ contenue dans le $\frac{1}{4}$ de plan ouvert

le quart de plan "ouvert" $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ x>0 \text{ et } y>0\}$
est ouvert

mais $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$ n'est pas ouvert
(considérer $(0,0)$ par exemple)

③ dans un espace discret : toute partie est ouverte (!)

soit $A \subseteq X$ supposons A non vide...

si $a \in A$, alors on a vu que $\underbrace{B(a,1)}_{\text{une boule}} = \{a\}$
une boule ouverte centrée en a, qui est donc contenue dans A...

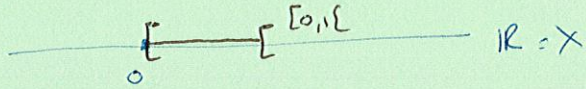
(!) très important : "être ouvert" est une notion relative : on est ouvert dans X, un ouvert de X (pour une distance donnée).

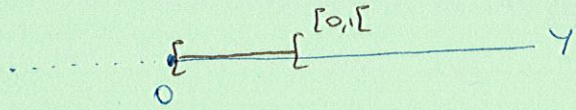
Si on change X, on change la notion d'ouvert :

exemple $X = \mathbb{R}$ usuel $\qquad Y := [0,+\infty[$ avec la distance induite

$A = [0,1[$ est une partie de X et aussi une partie de Y

$\begin{cases} A \text{ n'est pas ouverte dans } X \\ A \text{ est ouverte dans } Y \end{cases}$





p.ex le point 0 de A
est le centre de la boule $B_Y(0,\frac{1}{2})$
qui est bien entièrement contenue dans A

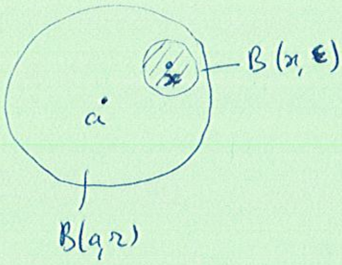
[puisque $B_Y(0,\frac{1}{2}) = Y \cap B_{\mathbb{R}}(0,\frac{1}{2}) = Y \cap]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[= [0,\frac{1}{2}[$]

Proposition (fondamentale) les boules ouvertes de (X,d) sont ouvertes

dém Soit $a \in A$, soit $r > 0$

On veut montrer que $B(a,r)$ est ouverte.

Pour cela :



soit $x \in B(a,r)$

donc $0 \leq d(x,a) < r$

posons $\varepsilon := r - d(x,a)$

on a bien $\varepsilon > 0$

et on affirme que $B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$:

si $y \in B(x,\varepsilon)$ c-à-d si $d(y,x) < \varepsilon$

alors $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$

$$< d(a,x) + \underset{\uparrow \atop \varepsilon = r - d(x,a)}{\varepsilon} = r$$

et donc $y \in B(a,r)$

On a donc bien trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$

Donc $B(a,r)$ est ouverte (dans X ...)

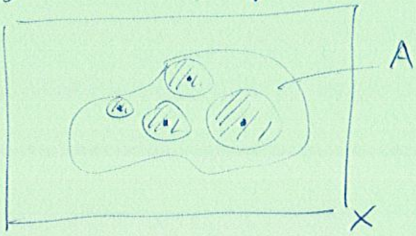
$\blacksquare$

Prop Tout ouvert (non vide) de X est réunion de boules ouvertes, et réciproquement.

dém * soit A un ouvert non vide de X

pour chaque $a \in A$, il existe un rayon $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subseteq A$

alors $\displaystyle\bigcup_{a \in A} B(a, r_a) = A$



* réciproquement, si A est une réunion de boules ouvertes

soit $a \in A$

alors a appartient à une des boules ouvertes de la famille, disons $a \in B(x, r_x)$,

dont A est la réunion.

ainsi $a \in B(x, r_x) \subseteq A$

or $B(x, r_x)$ est un ouvert de X (!), donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subseteq B(x, r_x)$

ainsi $\underbrace{B(a, \varepsilon)}_{\text{donc } a \text{ est le centre d'une petite boule contenue dans } A} \subseteq B(x, r_x) \subseteq A$

$\blacksquare$ Donc A est un ouvert de X

topo
I-12

Prop (!) Soit (X,d) un espace métrique

(i) $\emptyset$ et X sont des ouverts de X

(ii) si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille <u>quelconque</u> d'ouverts de X,

alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de X

(iii) si $O_1, \dots, O_n$ est une famille <u>finie</u> d'ouverts de X,

alors $O_1 \cap \dots \cap O_n$ est un ouvert de X

dém (i) l'ensemble vide vérifie toute propriété commençant par "$\forall x \in \emptyset, \dots$"

donc $\emptyset$ est ouvert

pour X c'est évident : pour tout $x \in X$ et <u>n'importe quel</u> $r>0$, on a $B(x,r) \subseteq X$

(ii) on se donne une famille d'ouverts O_i, pour $i \in I$

Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Donc il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$

Comme O_{i_0} est ouvert : il existe un $r>0$ tel que $B(x,r) \subseteq O_{i_0}$

Mais alors $B(x,r) \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$

Donc $\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouverte

(iii) on se donne $O_1, \dots, O_n$ ouverts (en nombre fini)

soit $x \in O_1 \cap \dots \cap O_n$

pour chaque $i = 1, \dots, n$, on a $x \in O_i$ ouvert, donc il existe un $r_i > 0$

tel que $B(x, r_i) \subseteq O_i$

posons $r := \min(r_1, \dots, r_n)$

alors $r>0$ et $\underbrace{B(x,r) \subseteq B(x,r_i) \subseteq O_i \text{ pour tout } i=1,\dots,n}_{\text{donc } B(x,r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} O_i}$

donc $O_1 \cap \dots \cap O_n$ est ouverte

$\boxed{1/4}$

exemple $\mathbb{R}$ usuel

$$\underbrace{\bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[}_{\text{une intersection infinie d'ouverts de } \mathbb{R}} = \underbrace{\{0\}}_{\text{ceci n'est pas un ouvert de } \mathbb{R}}$$

(!) en général, il est difficile de décrire de manière simple tous les ouverts de (X, d)

le cas "$\mathbb{R}$ usuel" est une exception (importante)

Théorème Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ usuel est réunion d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints

dém (idée) soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, supposé non vide

chaque $x \in O$ est donc le centre d'un intervalle ouvert contenu dans O...

soit I_x la réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans O.

Alors : (i) $x \in I_x$

(ii) I_x est un intervalle (c'est une réunion d'intervalles qui tous contiennent x)

(iii) I_x est un ouvert (c'est une réunion d'ouverts)

(iv) I_x est contenu dans O (comme chacun des intervalles dont il est la réunion)

(!) (ii) + (iii) = I_x est un intervalle ouvert

Ensuite :

(v) si $y \in I_x$, alors $I_y = I_x$:

si $y \in I_x$, alors I_x est un intervalle ouvert contenant y et contenu dans O

donc $I_x \subseteq I_y$ (!)

donc aussi $x \in I_y$ ... d'où de même $I_y \subseteq I_x$

et donc $I_x = I_y$ (double inclusion)

(vi) si $x, y \in O$, alors ou bien $I_x = I_y$ ou bien $I_x \cap I_y = \emptyset$:

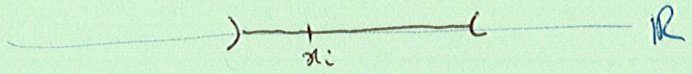
si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, alors $I_x \cup I_y$ est un intervalle, ouvert, contenu dans O, contenant x et y ... donc $I_x \cup I_y = I_x = I_y$

d'où $I_x = I_y$

On peut donc "choisir un représentant" pour chaque intervalle de la forme I_x pour un certain $x \in O$ ...

D'où une famille $(x_i)_{i \in I}$ de points de O, telle que

* $i \neq j \Rightarrow I_{x_i} \cap I_{x_j} = \emptyset$
* tous les I_x pour $x \in O$ apparaissent comme un I_{x_i}



si ceci est un intervalle I, de la forme $I = I_x$ pour certains $x \in O$,
on y choisit un élt x_i (et un seul)
de sorte que $I = I_{x_i}$

On a alors $\underbrace{O = \bigcup_{i \in I} I_{x_i}}$

O est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints

(!) l'ensemble d'indices I est <u>fini ou dénombrable</u>

car on peut choisir un <u>rationnel</u> r_i dans chaque I_{x_i} (intervalle ouvert non vide ...)

d'où une <u>injection</u> $I \longrightarrow \mathbb{Q}$
$i \longmapsto r_i$

car les I_{x_i} sont deux à deux <u>disjoints</u>

donc I est au plus dénombrable.

$\blacksquare$

(5) Convergence et continuité en termes d'ouverts

Soit (X,d) espace métrique, soit (x_n) suite de points de X, soit $a \in X$

Prop $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \iff$ pour tout ouvert contenant a,
il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in U$

dém $\boxed{\Leftarrow}$ les boules ouvertes sont des ouverts particuliers

$\boxed{\Rightarrow}$ soit U un ouvert contenant a

alors il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq U$

mais $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a,r)$

d'où un $N \in \mathbb{N}$ (celui-ci) tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in U$

(!) on rappelle que "$x_n \to a$" voulait initialement dire : pour toute boule ouverte $\overset{B(a,r)}{\vee}$ centrée en a,

il existe un N tq $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a,r)$

on a donc remplacé "pour toute boule ouverte de centre a"

par "pour tout ouvert contenant a"

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques, soit $X \xrightarrow{f} Y$ application, soit $a \in X$

Prop f est continue en $a \iff$ pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$,
il existe un ouvert U de X contenant a
tel que $f(U) \subseteq V$

(!) on rappelle que "f continue en a" voulait initialement dire :

pour toute boule centrée en $f(a)$, il existe une boule centrée en a telle que ...

on a donc remplacé les boules par les ouverts

dém $\boxed{\Rightarrow}$ soit V un ouvert de Y contenant $f(a)$

alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subseteq V$

d'où, par continuité de f en a, un $\delta > 0$ tel que $f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

il existe donc bien un ouvert U de X, à savoir $U = B_X(a,\delta)$, tel que $f(U) \subseteq V$

[puisque $f(U) = f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)) \subseteq V$]

$\boxed{\Leftarrow}$ soit $\varepsilon > 0$

la boule $B_Y(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de Y

par hypothèse, il existe donc un ouvert U de X contenant a,

tel que $f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

mais puisque U est un <u>ouvert</u> contenant a, il existe un $\delta > 0$ tq $B_X(a,\delta) \subseteq U$

d'où $f(B_X(a,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$

et donc f est continue en a

<u>Conclusion</u> : pour disposer des notions de "convergence de suite" et "continuité d'application",

on peut remplacer les boules par des ouverts ...

<u>D'où la question</u> : des distances <u>différentes</u> peuvent-elles avoir exactement les <u>mêmes ouverts</u> ?

[oui]

6 Distances équivalentes

Soit X un ensemble. Soient d_1 et d_2 deux distances sur X.

<u>Déf</u> (i) on dit que d_1 et d_2 sont <u>topologiquement équivalentes</u>

si elles ont les mêmes ouverts.

(ii) on dit que d_1 et d_2 sont <u>(fortement) équivalentes</u>

s'il existe des nombres $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

(!) deux distances équivalentes donnent les <u>m notions</u> de cv de suite et continuité d'application rappel : deux normes N_1 et N_2 sur E (espace vectoriel)

sont équivalents si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u) \quad \forall u \in E$$

les distances associés à des normes équivalentes sont donc fortement équivalents

Prop Deux distance fortement équivalentes sont topologiquement équivalents

dém On suppose que $\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$ avec $\alpha, \beta > 0$ (et $\alpha \leq \beta$...)

On va montrer que tout d_1-ouvert est aussi un d_2-ouvert, et réciproquement.

Soit $U \subseteq X$ un d_1-ouvert non vide (s'il est vide, c'st évidemment un ouvert de d_2...)

soit $a \in U$

il existe $r > 0$ tel que $B_{d_1}(a, r) \subseteq U$ car U st un d_1-ouvert

or $\alpha d_1 \leq d_2$ ...

donc $d_2(a, x) < \alpha r \Rightarrow \alpha d_1(a, x) < \alpha r$

$\Rightarrow d_1(a, x) < r$ car $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow x \in U$

ainsi $B_{d_2}(a, \alpha r) \subseteq U$

Donc U st ouvert pour d_2

Donc tout d_1-ouvert st aussi d_2-ouvert.

On démontre la réciproque en échangeant les rôles de d_1 et d_2 (m̂ preuve)

$\blacksquare$

Exemple les distances d_∞, d_1 et d_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont fortement équivalents

car les normes N_∞, N_1 et N_2 sont équivalentes deux à deux :

$$\boxed{N_\infty(x_1, \dots, x_n) \leq N_2(x_1, \dots, x_n) \leq N_1(x_1, \dots, x_n) \leq n\, N_\infty(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq \underbrace{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n|}_{\text{élever au carré des deux côtés}} \leq n \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

topo
I-15

Exemple $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$

d_1 et d_∞ n'ont pas les m̂ ouverts, p. ex :

Feuille TD 1

$B_{d_1}(O_E, 1)$ est ouverte pour d_∞

mais $B_{d_\infty}(O_E, 1)$ n'est pas ouverte pour d_1

Exemple (X, d) espace métrique quelconque

$\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ est une distance sur X,
topologiquement équivalente à d

Feuille TD 1

(!) δ est bornée, alors que d ne l'est pas a priori

Prop (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques

les distances d_∞, d_1 et d_2 sur $X \times Y$ sont fortement équivalentes

dém $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 d_\infty$

$\boxed{\mathbb{Z}}$