Université de Montpellier - Faculté des Sciences | L3 — Mathématiques
Année 2018-2019 | HLMA502 Topologie

Examen session 2 (17 juin 2019)
durée : 3h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. (2 points) Soit (X,d) un espace métrique, et soit A une partie non vide de X. On munit A de la distance induite d_A, la restriction de d à A.

1. Soient $a \in A$ et $r > 0$. Montrer que $B_A(a,r) = A \cap B_X(a,r)$, où B_X désigne la boule dans X et B_A la boule dans A.
2. Montrer que si U est un ouvert de A, alors il existe un ouvert V de X tel que $U = A \cap V$.

Utiliser la définition des ouverts d'un espace métrique.

Exercice 2. (2 points) Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X \times Y$ de la distance d_∞ associée. Montrer que si X et Y sont compacts, alors $X \times Y$ est également compact.

On peut utiliser la compacité séquentielle. Bien expliquer quel rôle joue la distance d_∞ dans la démonstration.

Exercice 3. (2 points) Soit (X,d) un espace métrique, et soit A une partie de X. On munit A de la distance induite.

1. Montrer que si A est complet, alors A est fermé dans X.
2. Montrer que si X est complet et si A est fermé dans X, alors A est complet.

On peut utiliser la caractérisation séquentielle de « être fermé dans X ».

Exercice 4. (4 points) Soit (X,d) un espace métrique complet. Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante [1] de parties de X fermées non vides telles que [2] $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Bien mettre en évidence le rôle joué par toutes les hypothèses.

(1). « décroissante » au sens de l'inclusion : $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2). On rappelle que le **diamètre** d'une partie bornée $A \subseteq X$ est défini par $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$.

Partie 2. Exercices

Exercice 5. (1 point)
Soit (X,d) un espace métrique. Soient A et B deux parties bornées de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$.

Exercice 6. (6 points)
Soit (X,d) un espace métrique. On considère une application $f : X \to X$ telle que $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ quels que soient $x, y \in X$.

1. Montrer que f est injective et continue. Donner un exemple pour lequel f n'est pas bijective.
2. On suppose maintenant que (X,d) est **compact**. Supposons que f ne soit pas surjective, et choisissons un $a \in X$ tel que $a \notin f(X)$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 := a$ et $x_{n+1} := f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(X) \cap B(a,r) = \emptyset$.
   b) Montrer que $d(a, x_n) \geq r$ pour tout entier $n \geq 1$.
   c) En déduire que $d(x_n, x_p) \geq r$ quels que soient les entiers distincts $n, p \geq 0$.
   d) Pourquoi obtient-on une contradiction ? Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 7. (4 points)
Soit H un espace de Hilbert. On considère une application linéaire continue $u : H \to H$ telle qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

1. Montrer que $\alpha\|x\| \leq \|u(x)\|$ pour tout $x \in H$.
2. Montrer que u est injective.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est fermée dans H.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(u)^{\perp} = \{0\}$.
5. En déduire que u est bijective, puis que sa réciproque u^{-1} est continue avec $|||u^{-1}||| \leq 1/\alpha$.