UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
ANNÉE : 2018-2019

L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)

Examen

Date : 9 janvier 2019
Durée : 3h00

Le sujet est recto-verso.
Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par l'étudiant·e.
Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On considère les deux permutations suivantes de $\mathcal{S}_9$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Écrire σ_1 et σ_2 sous forme de produits de cycles à supports disjoints.
(b) Existe-t-il $\tau \in \mathcal{S}_9$ tel que $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$? On énoncera précisement le critère utilisé.
(c) Si la réponse à la question précédente est positive, déterminer un tel τ et dire combien il y a de telles permutations τ ?
(d) Écrire les produits $\sigma_1\sigma_2$ et $\sigma_2\sigma_1$ sous forme de produits de cycles à supports disjoints.
(e) Existe-t-il $\tau \in \mathcal{S}_9$ tel que $\tau\sigma_1\sigma_2\tau^{-1} = \sigma_2\sigma_1$?
(f) Si la réponse à la question précédente est positive, déterminer un tel τ et dire combien il y a de telles permutations τ ?
(g) Déterminer σ_1^{422}, σ_2^{422} et $(\sigma_1\sigma_2)^{422}$.

Exercice 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ 0 \\ 2-y \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ x+1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer et factoriser son polynôme caractéristique $P_A(X)$.

(b) Déterminer le spectre de A.
(c) On note $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_4)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$. Déterminer une base et la dimension de E_{-1} et E_2.
(d) La matrice A est-elle diagonalisable ? On énoncera précisement le critère utilisé.
(e) Trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $T \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $AP = PT$.
(f) Donner une définition du polynôme minimal d'une matrice A.
(g) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
(h) Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(X)$ de A.
(i) Calculer la matrice $A^{17} - 3A^{16} + 4A^{14} + A - I_4$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère la matrice $B = P(A)$.

Première partie : On se propose de montrer que

$$\mathrm{Sp}(B) = \{P(\lambda) : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de la matrice M.
(a) Donner la définition d'une valeur propre de A et du spectre de A.
(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(B)$.
(c) Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(X) - \mu$.
  (i) Justifier qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$P(X) - \mu = c \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i).$$

  (ii) Montrer que

$$\det(B - \mu I_n) = c^n \prod_{i=1}^{d} \det(A - \alpha_i I_n).$$

  (iii) Montrer que si $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, alors il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\mu = P(\lambda)$.
(d) Conclure

Seconde partie : On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et on considère le polynôme

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X).$$

On pose $C = Q(A)$.
(a) Montrer que $\mathrm{Sp}(C) = \{0\}$.
(b) Déterminer le polynôme carcatéristique $P_C(X)$.
(c) Montrer que $C^n = 0$.
(d) Donner un exemple de matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $C^2 \neq 0$.