Année 2018-2019
L2 — SV Concours
HLMA413 Mathématiques

Épreuve écrite (24 mai 2019)
(durée : 2h)

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La ***qualité de la rédaction et de la présentation*** *sera largement prise en compte dans la notation ; gardez à l'esprit que vous vous adressez à un lecteur, auquel vous expliquez votre démarche, votre raisonnement, vos calculs.*

Exercice 1. Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant en x, y, z :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

(1) Soient n, k des entiers tels que $0 \le k \le n$. Montrer que :

$$(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \ge 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$

Exercice 3. On considère la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{x}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

(1) Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$.

(2) Montrer que f est dérivable sur $[-1, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$.

(3) Donner le tableau de variations de f et calculer la limite de f en $+\infty$.

On pourra utiliser les valeurs approchées $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \cong -2,62$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \cong -0,38$ *et* $f(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) \cong -0,2$.

(4) Le but de cette question est d'étudier plus précisément le comportement de f en $+\infty$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{1+h} - e}{h}$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)(e^{\frac{x}{x+1}} - e)$, par exemple en observant que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

(c) En déduire que la fonction f possède une asymptote en $+\infty$, dont on donnera l'équation.

(5) Donner l'allure du graphe de f. On représentera en particulier les points où le graphe de f et l'asymptote intersectent l'axe des abscisses.

Exercice 4. On se propose de calculer l'intégrale $I := \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

(1) En effectuant le changement de variable $u = \cos x$, montrer que :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{du}{1 - u^2}$$

(2) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b, que l'on déterminera, tels que :

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{a}{1 - u} + \frac{b}{1 + u} \qquad \forall\, u \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution succinte

1 On résout le système par la méthode du pivot. Les opérations élémentaires $E_1 \leftrightarrow E_3$, puis $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 - mE_1$, puis $E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ amènent par exemple au système suivant :

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad mz = m^2 \\ \quad (m-1)y + \quad (1-m)z = m - m^2 \\ \quad\quad (2-m-m^2)z = 1 + m - m^2 - m^3 \end{cases}$$

Dans ce nouveau système, la question est de savoir si les coefficients $m-1$ et $2-m-m^2$ sont nuls ou non. On remarque que $2-m-m^2 = (1-m)(m+2)$, donc on voit que trois cas doivent être distingués :

Si $m = 1$**:** dans ce cas, les trois équations du système initial sont les mêmes, à savoir $x+y+z = 1$. L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{(1-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

Si $m = -2$**:** dans ce cas, la dernière équation du nouveau système est $0 = -9$, donc le système n'a pas de solutions :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Si m **est différent de** 1 **et** -2**:** dans ce cas, le nouveau système est triangulaire. Il y a donc une unique solution. Après calcul et simplification :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1+m}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}$$

3