UNIVERSITE MONTPELLIER **M1 Manu.**

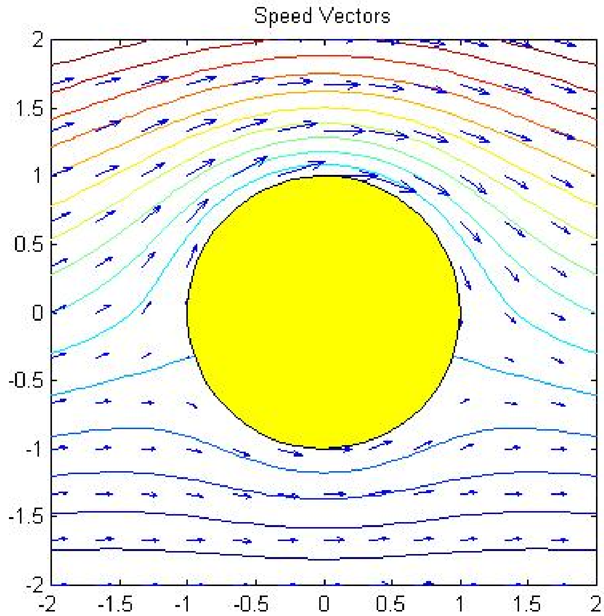
TD 2. UE Mécanique.

Exercice 1. Hydrostatique. On considère un fluide au repos.

1. Montrer que le tenseur des contraintes $\sigma = -p \cdot I$ (tenseur sphérique)
2. Le fluide est soumis à des forces f dérivant d'un potentiel U, i.e. $f = -\nabla U$. Prouver que $p + U = const.$
3. Le fluide au repos possède une surface libre en contact avec une atmosphère à pression constante p_0. Le fluide, supposé homogène de densité ρ est soumis à la seule force de gravité $\rho \cdot \mathbf{g}$. Prouver que la surface libre est nécessairement dans un plan horizontal et que la pression à la profondeur z est donnée par
$$p(z) = p_0 + \rho g z$$
4. Un corps est immergé dans le fluide. Retrouvez l'expression de la poussée d'Archimède : *un corps plongé complètement ou partiellement dans un liquide au repos subit de la part de ce dernier une poussée verticale dirigée vers le haut égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité géométrique de la partie immergée.*

Exercice 2. Relation de Bernoulli pour les fluides parfaits.
On suppose que le fluide est parfait, homogène et incompressible, qu'il est soumis à des forces dérivant d'un potentiel U et que l'écoulement est stationnaire. Montrer que la quantité
$$\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{p}{\rho} + U$$
est constante le long d'une ligne de courant.
indication : utiliser la formule de Lamb $(u \cdot \nabla)u = \nabla(\frac{1}{2}|u|^2) + (\nabla \times u) \times u$.
Montrer que si on suppose de plus que l'écoulement est irrotationnel si $\nabla \times u = 0$ alors la quantité
$$\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{p}{\rho} + U$$
est constante dans tout l'écoulement.

Exercice 3. Fluides parfait plan et analyse complexe.
Soit un écoulement de fluide parfait incompressible et *irrotationnel* Montrer que $z \mapsto \bar{\mathbf{u}} := f(z) = u_1 - i\, u_2$ est holomorphe. On suppose de plus domaine



simplement connexe. Montrer alors qu'il existe ψ une fonction de courant telle que

$$\nabla^{\perp}\psi = \mathbf{u}$$

et ϕ un *potentiel* tel que $\mathbf{u} = \nabla\phi$.

Montrer que la fonction $z = x + i\,y \mapsto F(z) = \phi(x,y) - i\,\psi(x,y)$ est analytique. Montrer que $F'(z) = f(z)$. La fonction F est appelée le potentiel complexe des vitesses. Cette fonction est la base de l'étude des écoulements potentiels plans par transformation conforme.
Par exemple, le potentiel $F(z) = U(z+\frac{R^2}{z})+\frac{\Gamma}{i\,2\pi}\ln z$ correspond à l'écoulement autour d'un cylindre de rayon R en rotation, comme sur la figure ci-dessus

1. Calculer la vitesse à l'infini, i.e. $\lim_{|z|\to\infty} u(z)$.

2. Calculer la circulation du vecteur vitesse le long d'un cercle centré en l'origine entourant le cylindre. Réponse: Γ. *Indication.* Montrer que $\int u_1 dx + u_2 dy = \oint_C f(z)\,dz$ puis appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de contour.

3. Montrer que la force résultante exercée par le fluide sur le disque est donnée par (Théorème de Blasius)

$$\mathcal{F} = -\frac{i\,\rho_0}{2}\overline{\oint_C f(z)^2\,dz}$$

4. En déduite la force exercée par le fluide sur le cylindre est $\mathcal{F} = -\rho_0 \Gamma U \mathbf{e_y}$ (formule de Kutta-Joukowsky).

5. Identifier les deux points précis de la circonférence où la vitesse du fluide s'annule (points de stagnation) et montrer qu'en ces points la pression est maximale.

La force (portance) est dirigée vers le haut quand $\Gamma < 0$, c'est l'effet Magnus qui explique la trajectoire bombée des balles liftées au tennis par exemple et la portance des ailes d'avions. Certains navires utilisent une propulsion à l'aide de cylindre tournants (rotor Flettner, voir wikipedia article Effet Magnus et aussi YouTube).

Exercice 4. Prouver que, en dimension 2, la vorticité $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ satisfait l'équation de convection-diffusion scalaire : $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = \nabla \times \mathbf{f}$ alors qu'en dimension 3, elle vérifie l'équation vectorielle :
$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \omega = \nabla \times \mathbf{f}$.

Montrer que : $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = Def(\mathbf{u}) \cdot \omega$ au sens du produit matrice-vecteur usuel.

★ A méditer : Le terme $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est responsable du "vortex-stretching" : [1] $Def(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable. De plus la trace de $Def(\mathbf{u})$ est nulle (c'est la divergence de $\mathbf{u}$) donc une des valeurs propres est strictement positive. Si on néglige l'effet de la dissipation visqueuse, en l'absence de forces extérieures, l'équation de la vorticité s'écrit :

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = Def(\mathbf{u})\, \omega$$

Si ω est colinéaire à une direction propre de $Def(\mathbf{u})$ associée à une valeur propre strictement positive, ω subit une amplification exponentielle et peut "exploser". Ce phénomène est typique des écoulements $3D$ et est peut-être responsable de l'apparition éventuelle de singularités.

Exercice 5. Conservation de l'hélicité. On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine Ω. On appelle hélicité[2] la quantité $\mathcal{H} := \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$. On suppose que le fluide est parfait et que $\nabla \times \mathbf{u}$ est nul sur $\partial\Omega$. Montrer que l'hélicité est conservée au cours du temps: $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$. *Indication.* Montrer que $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}^2/2 + p/\rho)\omega \cdot \mathbf{n}$.

[1] littéralement étirement des tourbillons.

[2] découverte en 1961 par J. J. Moreau, Université Montpellier.